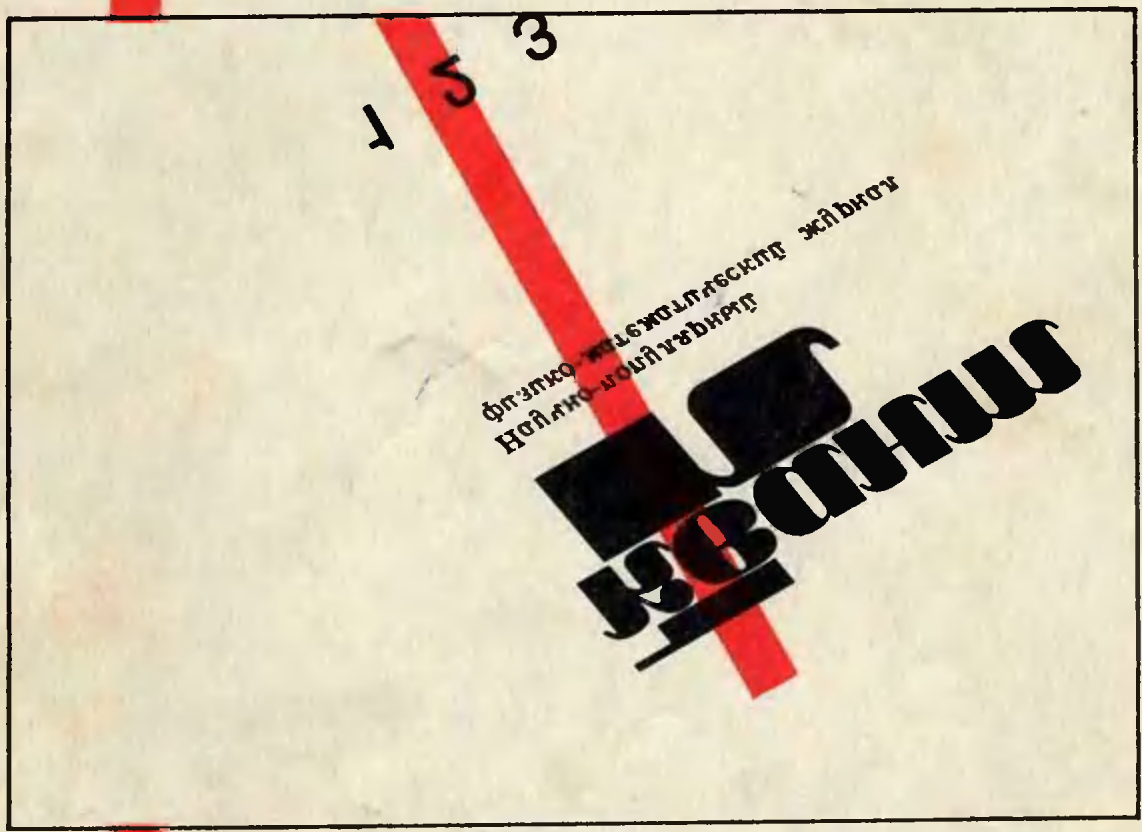


Квант

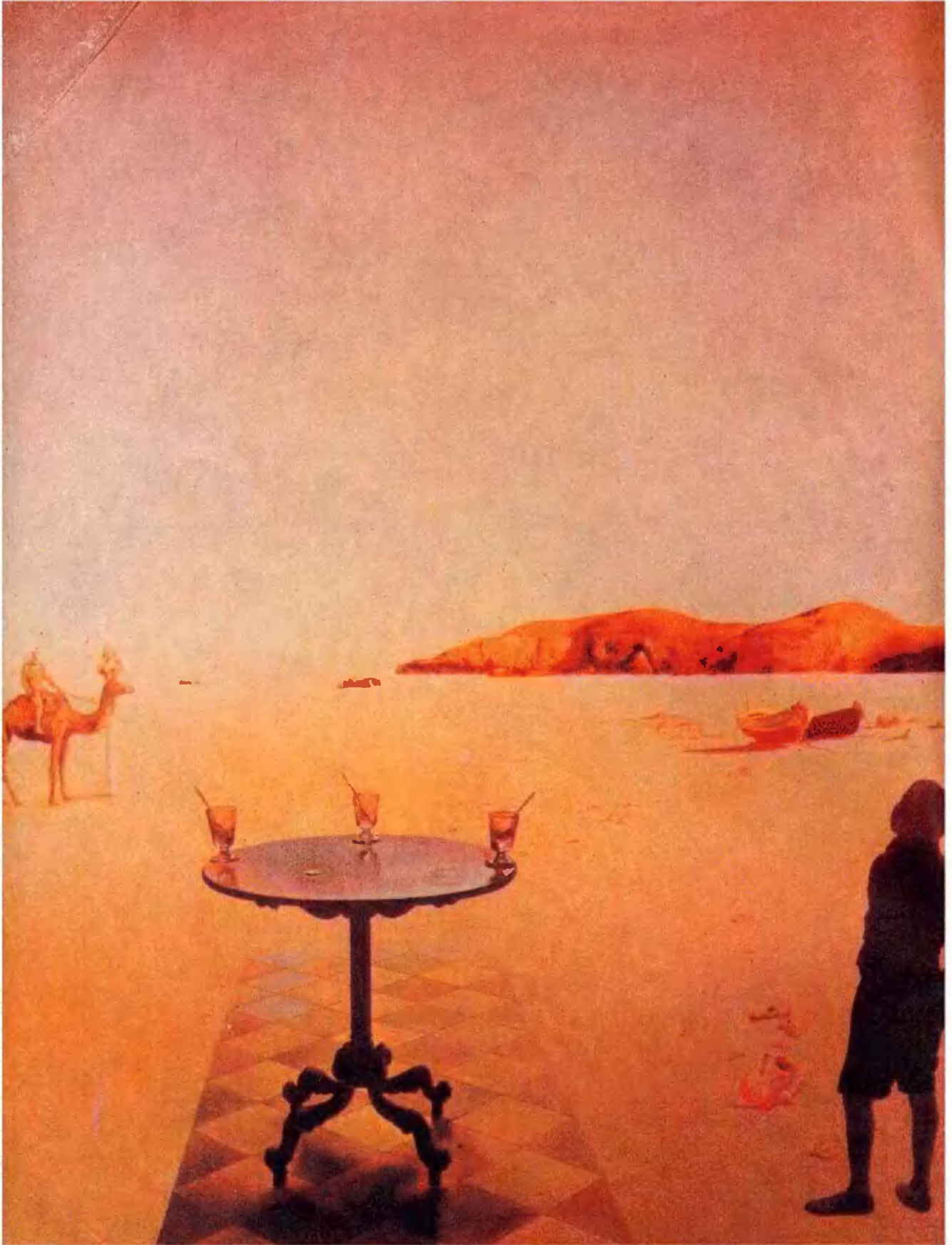
Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



$S_1 \cdot R_0 \cdot T_1$

1989



Научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука».
Главная редакция физико-
математической литературы

В номере:

- 2 Наш круглый стол
6 А. Б. Сосинский. Косы и узлы
16 П. В. Блюх. Глобальные резонансы
23 А. С. Штейнберг. Правнло фаз Гиббса
30 И. Ф. Акулич. Бурсацкое развлечение
- Задачник «Кванта»**
34 Задачи M1146—M1150, Ф1153—Ф1157
35 Решения задач M1121—M1124, Ф1133—Ф1136
- 40 Калейдоскоп «Кванта»
- Р — значит ракета**
45 «Союз» открывает Турнир
«Квант» для младших школьников
- 46 Задачи
47 С. В. Дворянинов, А. П. Савин. Арифметика
песочных часов
- Школа в «Кванте»**
Математика 8—10:
50 Э. Г. Готман. Геометрические преобразования.
Часть I: Движения
54 Избранные школьные задачи
- Лаборатория «Кванта»**
55 Я. Е. Амтиславский. Рефрактометр для домашней
лаборатории
60 Д. Д. Христозов. Лазерный рефрактометр
- Практикум абитуриента**
62 А. Р. Зильберман. Статика
- 66 Варианты вступительных экзаменов
- 73 Ответы, указания, решения
Нам пишут (14, 72)
Информация (29, 80)
- Наша обложка**
1 Обложка «Кванта» после применения композиции движе-
ний (см. статью «Геометрические преобразования»).
- 2 Репродукция картины испанского живописца С. Дали
«Солнечный стол» (1936). Что это — мираж? игра вооб-
ражения? запечатленные ассоциации? Это — тайна
художника. А с точки зрения физики отдельные элементы
картины можно рассматривать как иллюстрации зако-
нов оптики, в частности — закона преломления света
(читайте статьи раздела «Лаборатория «Кванта»).
- 3 Шахматная страничка.
4 Головоломка из коллекции известных собирателей голово-
ломок Дж. Слокума и Дж. Ботерманса.

НАШ КРУГЛЫЙ СТОЛ

25 лет назад по инициативе ведущих ученых страны академиков А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, П. С. Александрова, И. К. Кикоина и М. А. Лаврентьева были созданы специализированные физико-математические школы-интернаты в Москве, Ленинграде, Киеве и Новосибирске. Задача этим школам была поставлена так: школьникам, живущим вдалеке от научных центров, предоставить те же возможности выдвижения в науку, что и ученикам университетских городов.

Недавно в нашей редакции состоялась встреча, посвященная двадцатипятилетию физико-математической школы-интерната при МГУ. Представляем ее участников: *Д. Л. Абраров* — директор школы, *В. В. Вавилов* — доцент МГУ, член редколлегии «Кванта», *В. Н. Дубровский* — преподаватель школы-интерната при МГУ, член редколлегии «Кванта», *А. А. Егоров* — научный сотрудник АПН СССР, преподаватель школы-интерната при МГУ, *О. Н. Найда* — бывший завуч школы, ныне научный работник, кандидат физико-математических наук, *А. Б. Сосинский* — доцент МИЭМ, член редколлегии «Кванта», *Г. Ш. Фридман* — доцент Омского государственного университета, выпускник ФМШ при НГУ.

Д. Л. Абраров. Главный результат работы любой школы — это ее выпускники. Наш интернат за 25 лет существования выпустил более 4000 человек. Практически все они поступили в вузы (главным образом, в МГУ и МФТИ), многие закончили аспирантуру, защитили диссертации.

Среди наших выпускников — более 400 кандидатов и 20 докторов наук, есть лауреаты Ленинской и Государственной премий, премий Совета Министров СССР и Ленинского комсомола.

Наш выпускник *Ю. А. Матиясевич* решил 10-ю проблему Гильберта, выдающиеся работы выполнены *А. Н. Варченко*, *Е. В. Щепиным*,

И. М. Кричевером, *В. В. Никулиным* и др. Сейчас максимальный возраст выпускников — 43 года, они успешно работают в различных научных институтах, вычислительных центрах, учебных заведениях.

Среди преподавателей интерната 25 кандидатов и 3 доктора наук. Это позволяет вести учебные курсы нестандартно, развивать и поддерживать интерес к науке. Нас радуют успехи наших учеников на олимпиадах всех уровней — от московских до международных.

Еще в 60-е годы появилась традиция: выпускники интерната, став студентами, возвращались в школу преподавать. Невозможно перечислить всех. Назову лишь *А. П. Веселова*, *В. Н. Дубровского*, *А. Н. Дранишников*, *Б. М. Ивлева*, *Т. Н. Трушанину*, *Е. В. Щепина* — это ведущие преподаватели, давно и творчески работающие в интернате.

О. Н. Найда. В 1962—63 годах по поручению комитета комсомола физфака МГУ я помогал *И. К. Кикоину* в его работе со школьниками. Буквально на моих глазах весной 1963 года *И. К. Кикоин* составил письмо в адрес правительства с предложением открыть в Москве интернат, аналогичный новосибирскому, который уже работал в то время благодаря инициативе *М. А. Лаврентьева*. Письмо подписали ректор МГУ *И. Г. Петровский*, президент АН СССР *М. В. Келдыш*, а также руководители высшей школы, просвещения и ведущих отраслей промышленности. Результатом их настойчивости было постановление Совета Министров СССР об организации школ-интернатов при Киевском, Ленинградском, Московском и Новосибирском университетах.

Потом была огромная работа по проведению первого набора в школу. Первые 19 учеников (11-й класс) были набраны из числа победителей III Всероссийской математической олимпиады. Их пригласили в Летнюю школу в Красновидово под Можайском,

где с ними непосредственно занимался А. Н. Колмогоров со своими помощниками. После Летней школы все они были зачислены в интернат.

У меня сохранилась до сих пор контрольная работа Гены Архипова. Сейчас он — доктор физико-математических наук, известный специалист по теории чисел. Он всегда был влюблен в математику, а сколько выдумки и остроумия проявил, решая эту контрольную по физике!

Наш интернат начал работать в декабре 1963 года. Надо было видеть, с каким интересом ребята проводили лабораторные работы, изготавливали счетчики космических лучей — еще бы — при пролете частиц загорались лампочки. Огромным успехом пользовались курсы теоретической физики. Хочется пожелать нынешним учителям и ученикам такой же веселой работы, как это было в первые годы.

А. Б. Сосинский. Я начал работать в интернате в 1964 году одновременно с такими замечательными математиками как В. М. Алексеев, В. И. Арнольд, В. М. Тихомиров, Д. Б. Фукс и др. — одно их присутствие в школе задавало чрезвычайно высокий уровень преподавания. Очень любили и ребята, и педагоги одного из лучших учителей-математиков Москвы А. А. Шершевского. Большую роль в становлении интерната сыграли и более молодые математики, работавшие там в первые годы его существования: Е. В. Гайдуков, Д. И. Гордеев, А. А. Егоров, Ю. А. Ильященко, И. Г. Журбенко, А. С. Мищенко, В. А. Скворцов. Чрезвычайно интересно и живо была поставлена физика. Занятия вели молодые преподаватели, аспиранты и студенты физфака МГУ и МФТИ. Первый директор интерната П. А. Кузнецов очень много сделал за свое непродолжительное директорство (через год с небольшим он перешел работать директором в другую школу). Его сменила Р. А. Острая — фронтовик, историк по специальности (Раиса Аркадьевна окончила Институт философии, литературы и искусства), человек велико-

лепно образованный, интеллигентный в самом высоком смысле этого слова. Она сразу поняла и приняла идею создателей школы: в интернате следует приобщать не только к точным наукам, но и к культурным ценностям.

При отборе преподавателей Андрей Николаевич Колмогоров считал важным не только знание математики или физики, но начитанность, понимание музыки, истории, некоторые спортивные навыки. Не зря ФМШ иногда расшифровывают как «футбольно-математическая школа» — имеются в виду горячие поединки между командами учеников и учителей по футболу, баскетболу, волейболу и другие соревнования.

Коллектив преподавателей первых лет — люди не намного старше своих учеников — сумел вовлечь питомцев в интересную интенсивную интеллектуальную жизнь. Устраивались музыкальные вечера, коллективные чтения Пастернака, Булгакова, Хлебникова, Заболоцкого, Ахматовой.

Об этом периоде интерната можно сказать словами из замечательного стихотворения «19 октября» известного сейчас поэта-барда Ю. Кима, преподававшего в интернате литературу и историю. Там есть такие строчки:

*Под твоей бессмертной сенью
Научиться бы вполне
Безоглядному веселью,
Бескорыстному доверью,
Вольнодумной глубине...*

Однако многим пришлось не по душе «безоглядное веселье», вызывало недоверие «бескорыстное доверье» и уж совсем отвратительной казалась «вольнодумная глубина». В 70-е годы развитие интерната пошло не в ту сторону. Он все больше превращался в нечто вроде подготовительных курсов для школьников из провинции, причем все большую роль при поступлении в интернат играло социальное происхождение, а не настоящие способности к науке, так что с 70-х годов наблюдалось падение научной интенсивности жизни интерната.

Сейчас в интернат пришли новые люди, и верится, что интернат — это замечательное явление нашей культу-



А. Н. Колмогоров читает лекцию.

ры — вернется к своей истинно просветительской деятельности.

А. А. Егоров. Я работаю в интернате с конца 1963 года — с момента его открытия, так что вся история школы у меня в памяти.

Интернат осуществлял и осуществляет идею его создателя А. Н. Колмогорова: дать возможность одаренному школьнику как можно раньше (начиная с младших курсов университета) включиться в научную работу. Таким образом, главная задача преподавания — это развитие устойчивого интереса, даже потребности к самостоятельным исследованиям, творчеству. Мы показываем ученикам различные подходы к задачам, учим смотреть на проблему с разных сторон. К сожалению, часто в школах математику преподают так, как в армии учат «Устав», и к нам иногда приходят ребята, хоть и способные, но уже заторможенные своими школьными учителями. Рас тормозить их, заставить их мозги работать, научить учиться и привить

вкус к учению — вот, что мы стремимся сделать.

Д. Л. Абраров. Я прошел путь от ученика (окончил интернат в 1977 году) до директора школы. Годы пребывания в интернате запомнились мне на всю жизнь учением и интересным бытом. Я благодарен преподавателям, поддерживавшим и развивавшим наш интерес к математике и физике. В нашем классе решались задачи, предлагаемые Научным обществом учащихся. Очень трудные, исследовательские задачи, порой проблемы. Каждый ученик мог пытаться их решать. На каникулах бывало желание отъесться и отоспаться, но очень скоро в руках оказывалась книга, и дни отдыха проходили в самостоятельных занятиях. Такие трудные книги, как книга Колмогорова и Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа», дополнительно подогревали интерес своей непонятностью. Увлеченно делали математический практикум (порой нас по ночам разгоняли дежурные преподаватели, когда мы решали задачи, забившись в какой-нибудь укромный уголок). Это, впрочем, и сейчас есть.

В. В. Вавилов. Дмитрий Леонардович Абраров упомянул замечательный учебный предмет — математический практикум. В комнате, где мы сейчас беседуем, есть стенд со всеми вышедшими до сегодняшнего дня номерами «Кванта». Так вот, я вижу по меньшей мере 7 обложек, на которых изображены картинки, выполненные школьниками при подготовке заданий по практикуму. Что же он представляет собой? Приблизительно один раз в месяц в интернате читаются лекции, а затем вывешиваются задания по практикуму. Выполняя задания, школьники должны освоить теорию, произвести расчеты и выполнить графическую часть работы. Задачи эти уникальны, требуют от учащихся умения ориентироваться в незнакомой ситуации, самостоятельности и глубины усвоения материала — по существу это исследовательская работа. Одна из тем: «Летающие тарелочки».

(Окончание см. на с. 15)



Трудная задача...



А. А. Шершевский.



А. Н. Земляков.



В. Н. Дубровский.



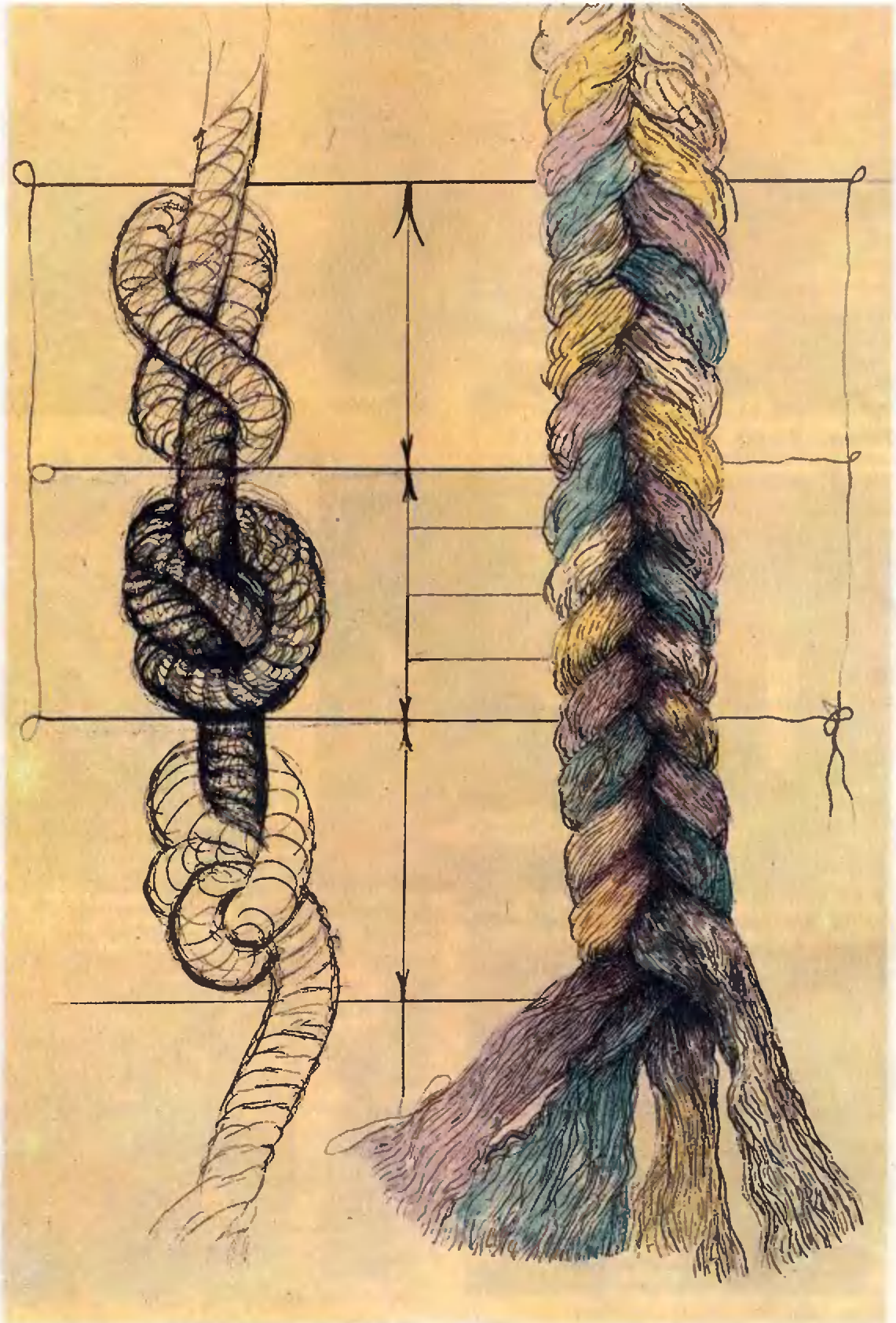
*А. П. Веселов и
А. Б. Сосинский.*



Лекция А. А. Егорова.



Урок физики Е. Л. Суркова.



КОСЫ И УЗЛЫ

Кандидат физико-математических наук
А. В. СОСИНСКИЙ

Плетение кос и завязывание узлов — разве это математика?

Прилежный ученик обычно выносит из школы такую точку зрения: математика занимается абстрактными понятиями, а такие предметы быта, как косы и узлы, к математике иметь отношения не могут.

Но это не так. Математики в наше время занимаются не только возвышенными проблемами — теорией чисел, расчетом космических полетов, исследованием стихотворных размеров, — но и земными, повседневными вопросами: экономическими подсчетами и даже... теорией очередей.

И теорией кос. Это реальная и живая наука, возникшая в 20-х годах нашего века, еще не завершена и не исчерпала своих приложений. А по красоте теория кос не уступает классической, но застывшей в своем величии математике античности и XVI—XVII веков, которую только и изучают в школе.

Наш рассказ начнем с примеров кос (рис. 1). Косу можно себе представлять так: в верхний и нижний

край вертикальной доски вбито по n гвоздиков (n может равняться 1, 2, 3, ...) — каждый из гвоздиков верхнего основания соединен нитью с одним из гвоздиков нижнего; нити попарно не пересекаются и все время должны опускаться вниз (нить не имеет права, повернувшись, начать подниматься вверх: фигуры на рисунке 2, например, косами не являются).

Две косы считаются эквивалентными (т. е. одинаковыми), если одну можно превратить в точную копию другой, двигая нити (без разрывов и склеиваний) так, чтобы каждая точка каждой нити перемещалась только в горизонтальной плоскости. Такое движение показано на рисунке 3.

На рисунке 1 вверху у начала каждой нити художник указал ее порядковый номер. Внизу снова указан номер каждой нити — но здесь номера не обязаны идти по порядку: каждой косе соответствует перестановка номеров ее нитей. Так, косам K_1 , K_3 , K_5 на рисунке 1 отвечают перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

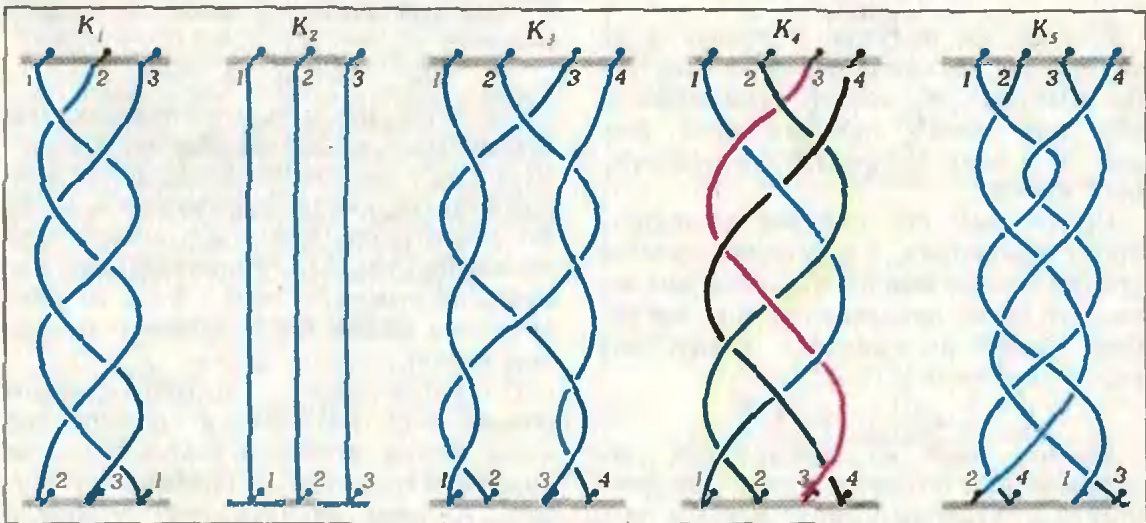


Рис. 1. Примеры кос из трех и четырех нитей: K_1 — «девичья коса»; K_2 — тривиальная коса; K_3 — ?; K_4 — крашенная коса; K_5 — циклическая коса.

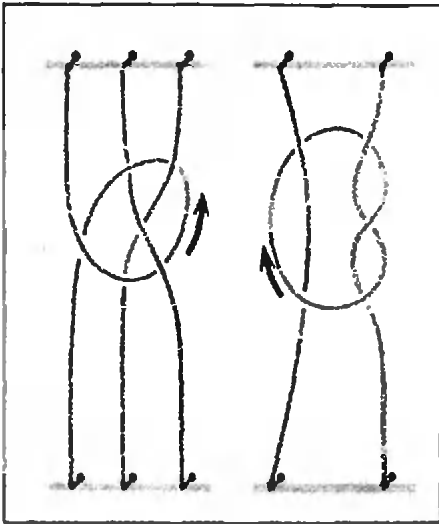


Рис. 2. Эти фигуры не являются косами: их нити имеют восходящие участки.

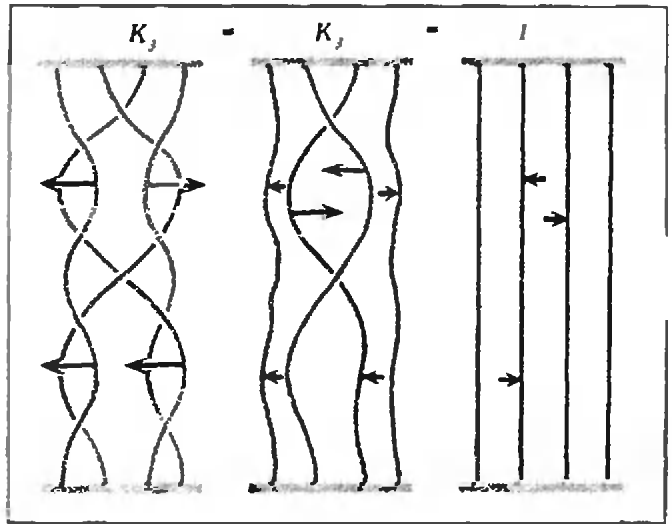


Рис. 3. Геометрическое доказательство тривиальности косы $K_3=1$: «горизонтальными» движениями нитей K_3 превращается в косу из четырех вертикальных нитей.

Среди кос на рисунке 1 выделяется крашенная коса K_4 ; так она называется вовсе не потому, что художник нарисовал ее нити разными цветами: крашеной называется любая коса, которой отвечает тождественная перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix},$$

т. е. коса, сохраняющая порядок номеров нитей. Тривиальная коса, все нити которой вертикальные прямые, — частный случай крашеной косы.

Кстати, на рисунке 1 показана не одна, а две тривиальные косы. Две? — Да, именно две: коса K_3 тривиальна, ибо она легко превращается (см. рис. 3) в косу из четырех вертикальных нитей.

Среди всех кос следует выделить, кроме крашенных, в известном смысле противоположные им *циклические косы*: это косы, переставляющие все номера нитей по единственному циклу, как это делает коса K_5 :

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

Косы — один из простейших геометрических объектов, легко поддающихся «алгебраизации»: косы с одинаковым числом нитей можно *умножать*. Делается это совсем просто (см. рис. 4): нужно приложить одну

косу к другой, склеив соответствующие нити, и удалить ставшие ненужными гвоздики (нижние гвозди первой косы и верхние — второй). Такое умножение обладает рядом свойств обычного умножения чисел: выполняется ассоциативный закон

$$K_1(K_2K_3) = (K_1K_2)K_3,$$

есть аналог единицы — *тривиальная коса* $K_2=1$, для которой

$$1 \cdot K = K \cdot 1 = K.$$

Есть и аналог деления: у каждой косы K имеется *обратная коса* K^{-1} ; для нее

$$K^{-1} \cdot K = K \cdot K^{-1} = 1.$$

Последний факт не очевиден, и мы предлагаем читателю самому придумать, как построить косу, обратную данной. Ну а если не получится, можно посмотреть ответ на следующей странице (рис. 5). Умножение кос, однако, *не коммутативно*: $K \cdot L$ не обязательно равно $L \cdot K$ (пример приведен ниже).

Получившийся алгебраический объект — он называется *группой кос из n нитей* и обозначается B_n — не слишком прост, но основательно изучен. Начнем изучать группу кос и мы. Для этого потребуются *элементарные косы* S_1, S_2, \dots, S_{n-1} из n нитей (рис. 6).

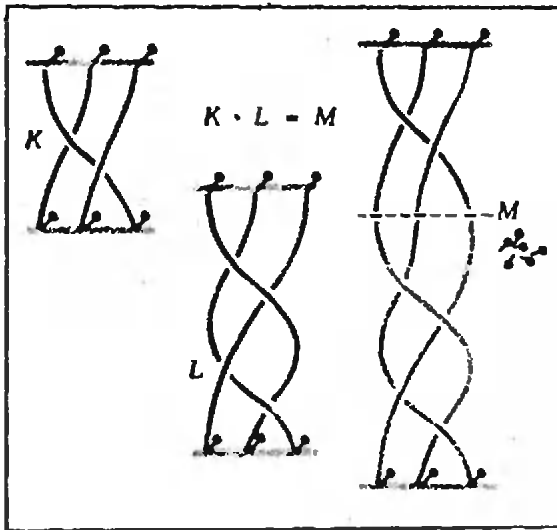


Рис. 4. Умножение кос: верх второй косы прикладывается к низу первой и соответствующие нити склеиваются.

Оказывается, что любая коса представляется в виде произведения элементарных кос S_1, S_2, \dots и обратных к ним. Например, очевидно, что

$$K_1 = S_1 S_2^{-1} S_1 S_2^{-1} S_1 S_2^{-1} S_1 S_2^{-1}.$$

Далее

$$K_3 = S_2 S_1 S_3^{-1} S_1^{-1} S_3 S_2^{-1} S_1 S_3 S_1^{-1} S_3^{-1};$$

это становится очевидным, если надлежащим шевелением нитей немного опустить 4 двойные точки, находящиеся справа на косе K_3 (рис. 7).

Упражнение 1. Представьте косы K_1, K_3 (см. рис. 1) в виде произведения элементарных кос S_1, S_2, S_3 и обратных к ним.

В теории кос, как в аналитической геометрии, алгебраическая запись позволяет геометрические рассуждения заменить совершенно механическими вычислениями, основанными на следующих тождествах:

I. Тривиальные соотношения

$$S_i S_i^{-1} = S_i^{-1} S_i = 1,$$

$$S_i \cdot 1 = 1 \cdot S_i = S_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1).$$

II. Далекая коммутативность

$$S_i S_j = S_j S_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2 \\ (i, j=1, 2, \dots, n-1).$$

III. Соотношения сплетения

$$S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n-2).$$

Справедливость этих тождеств почти очевидна (рис. 8). Из них выво-

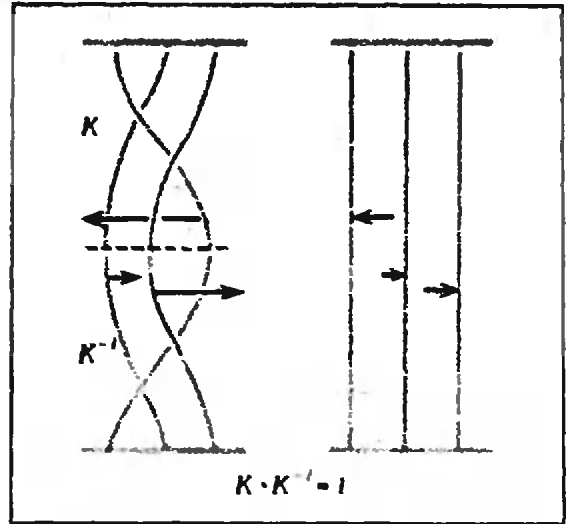


Рис. 5. Коса, обратная к данной: зеркальный образ косы K (относительно горизонтальной плоскости, проходящей через ее нижнее основание) и есть обратная к K коса K^{-1} . Действительно, симметричные относительно этой плоскости пары двойных точек косы KK^{-1} можно попарно уничтожить, последовательно двигаясь от центра косы к ее краям.

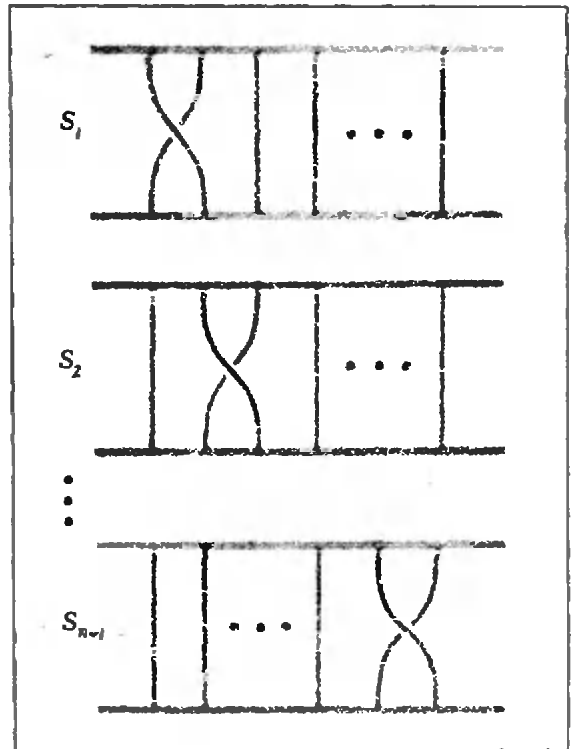


Рис. 6. Элементарные косы: i -я элементарная коса S_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) состоит из $(n-2)$ вертикальных нитей, а ее i -я нить меняется местами с $(i+1)$ -й (проходя над ней).

дятся и другие соотношения, например более общая форма далекой коммутативности:

Упражнение 2. Докажите, что $S_i^{\epsilon} S_j^{\delta} = S_j^{\delta} S_i^{\epsilon}$ при $\epsilon, \delta \in \{1, -1\}$, $|| - j| \geq 2$.

Разберем еще один пример: докажем соотношение $K_3 = 1$ (установленное геометрическим путем на рисунке 3) прямым вычислением. Имеем:

$$\begin{aligned} K_3 &= S_2(S_1 S_3^{-1}) S_1^{-1} S_3 S_2^{-1} S_1 (S_3 S_1^{-1}) S_3^{-1} = \\ &= S_2 S_3^{-1} (S_1 S_1^{-1}) S_3 S_2^{-1} (S_1 S_1^{-1}) (S_3 S_3^{-1}) = \\ &= S_2 S_3^{-1} \cdot 1 \cdot S_3 S_2^{-1} \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= S_2 (S_3^{-1} S_3) S_2^{-1} = S_2 S_2^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Здесь мы вначале воспользовались далекой коммутативностью, а затем все «само» сократилось (за счет тривиальных соотношений).

Упражнения
3. Докажите тождества

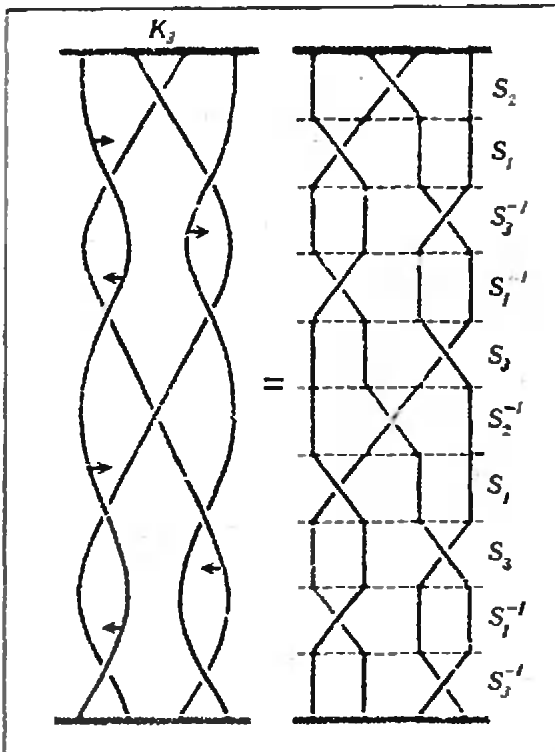


Рис. 7. Представление косы K_3 через элементарные косы S_1, S_2, S_3 и обратные к ним. Для этого малым движением нитей все двойные точки располагаются на разных уровнях, после чего алгебраическую запись K_3 можно просто прочитать по рисунку: $K_3 = S_2 S_1 S_3^{-1} \times S_1^{-1} S_3 S_2^{-1} S_1 S_3 S_1^{-1} S_3^{-1}$.

$$\begin{aligned} S_1^{-1} S_2^{-1} S_1^{-1} &= S_2^{-1} S_1^{-1} S_2^{-1}, \\ S_1 S_2 S_1 S_2^{-1} S_1^{-1} &= S_3 S_1 S_3^{-1} S_1^{-1} S_2. \end{aligned}$$

4. Докажите, что $S_1 S_2 \neq S_2 S_1$ при $n \geq 8$.

Чем объяснить успех в решении упражнения 3 (и предыдущие подсчеты) — результатом удачного подбора задач или закономерностью? Иными словами, достаточно ли соотношений I—III для доказательства всех равенств в теории кос? Оказывается — да: немецкий математик Эмиль Артин, создатель теории кос, доказал в 1936 году, что любое равенство в теории кос вытекает из соотношений I—III. Эта замечательная теорема позволяет решить основную проблему теории кос — проблему классификации. Именно, можно указать (бесконечный) список кос (без повторений) и алгоритм, относящий любой косе ее номер в этом списке.

Доказательства этих двух фактов не элементарны, и мы на них не оста-

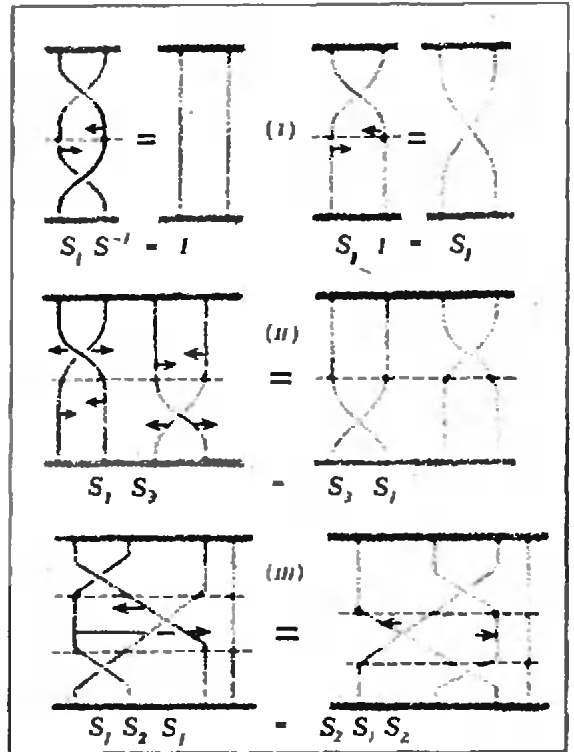


Рис. 8. Доказательство основных соотношений теории кос: (I) тривиальные соотношения (для кос из двух нитей); (II) далекая коммутативность (для кос из четырех нитей); (III) соотношение сплетения (для четырех нитей). Для случая большего числа нитей все доказывается аналогично.

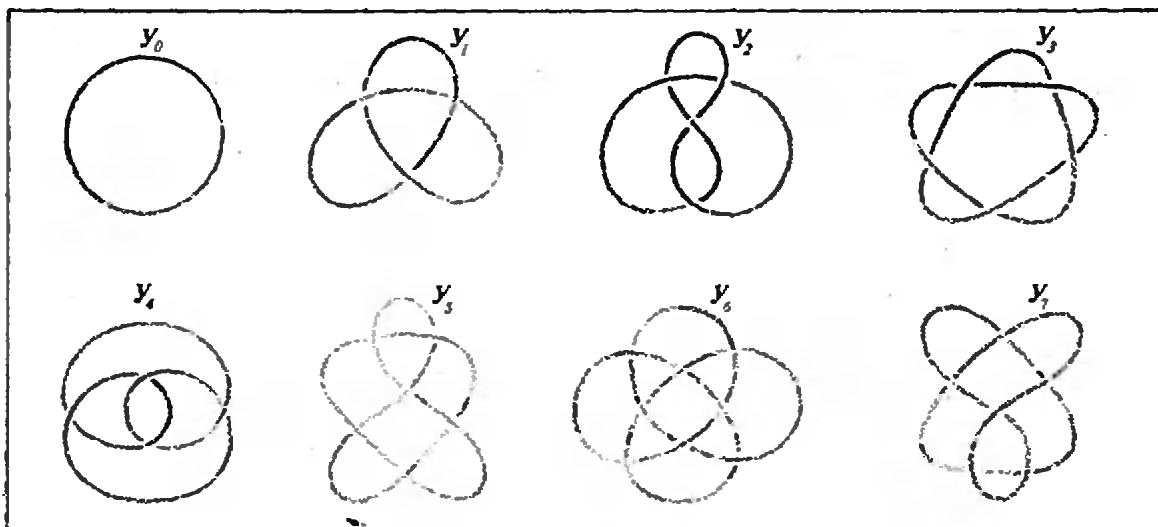


Рис. 9. Примеры узлов: Y_0 — тривиальный узел; Y_1 — «трилистник»; Y_2 — «восьмерка»; Y_3 — узел β ; Y_4 — ?; Y_5 — «турецкая чалма»; Y_7 — ?

навливаемся. Отметим лишь то, что с их помощью геометрическая теория кос превращается в вычислительную науку, в которой все конкретные вопросы могут, в принципе, быть решены компьютером.

Скептический читатель спросит: ну и что? а зачем нужно уметь решать эти «конкретные вопросы»?

Попробую ответить. Дело в том, что теория кос, как уже говорилось, имеет много приложений как в математике, так и за ее пределами. Я остановлюсь здесь лишь на одном приложении, которое особо ценю — приложении к теории узлов.

Рассмотрим для начала несколько примеров узлов (рис. 9). Узел — это замкнутая линия в пространстве, гладкая или ломаная, которая может быть как угодно закручена и переплетена. Полезно себе представлять, что узел сделан из тонкой, гибкой и растяжимой нити; мы считаем, что два узла одинаковы (эквивалентны), если можно один превратить в точную копию другого, двигая, изгибая, растягивая и сжимая эту нить в пространстве, не разрывая ее. Среди узлов выделяется *тривиальный узел* (собственно, и не узел вовсе) — обычная, незаузленная окружность: Y_0 на рисунке 9. Впрочем, на этом рисунке показано два изображения тривиального узла: узел Y_7 тоже триви-

ален — его легко распутать, превратив в большую окружность (проделайте это мысленно или с помощью карандаша и ластика!). Более того, на рисунке 9, кроме Y_0 и Y_7 , есть еще одна пара эквивалентных узлов.

Упражнение 5. Найдите два нетривиальных эквивалентных узла на рисунке 9.

Математикам удобнее иметь точное определение эквивалентности узлов, а не наглядное описание, подобное данному нами выше. Приведем такое определение. Для этого мы условимся считать, что узел — не плавно изгибающаяся кривая, а ломаная. Тогда *элементарной операцией* называется замена одного звена ломаной — скажем, ломаной AB на рисунке 10 — на двузвенную ломаную ACB (и обратный переход от ACB к AB), при условии, что узел не содержит внутренних точек треугольника ABC . Два узла будут эквивалентными, если от одного к другому можно перейти с помощью конечной последовательности элементарных операций (рис. 10). Разглядев этот рисунок, вы без труда поймете, что этому определению эквивалентности действительно отвечает приведенное выше наглядное описание.

Для узлов, как и для кос, можно ставить проблему классификации: указать (бесконечный) список узлов (без повторов) и алгоритм, относящий любому узлу его номер в этом

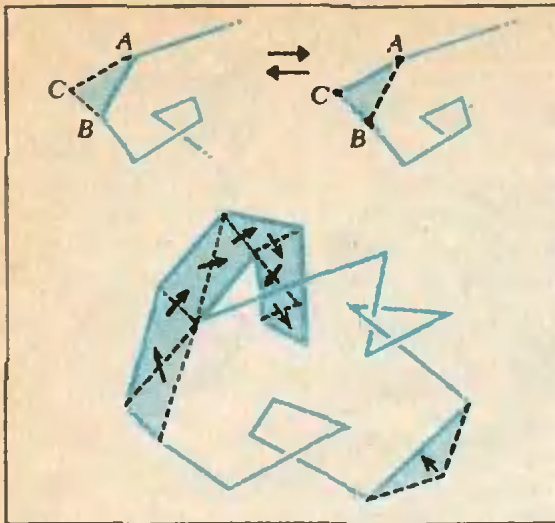


Рис. 10. Элементарные операции над узлом: отрезок AB заменяется на ломаную ACB при условии, что узел не пересекает треугольник ABC ; последовательное применение таких операций позволяет деформировать узлы.

списке. Хотя эта проблема сегодня в принципе решена, решение это настолько громоздко, что практической пользы от него нет. Нельзя ли свести эту проблему к (уже решенной) проблеме классификации кос? Здесь напрашивается следующий ход.

Возьмем косу, изогнем ее дугой и склеим конец с началом (рис. 11). Получится узел. Впрочем, всегда ли такое замыкание косы дает узел?

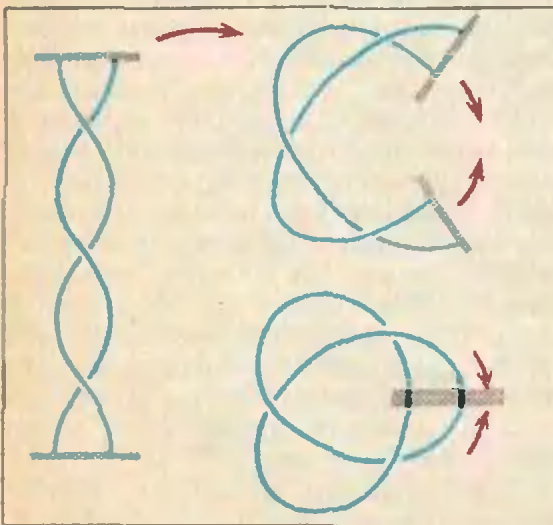


Рис. 11. Замыкание косы: соединив начало и конец простейшей косы, получаем узел («трилистник»).

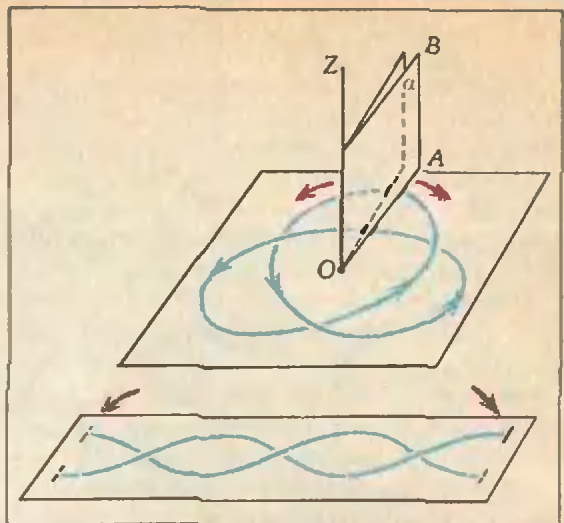


Рис. 12. Раскручивание положительного узла в косу. Вертикальная полуплоскость α раздвигается, открывается как книжка и узел разворачивается в косу. Эта операция — обратная к замыканию косы (рис. 11).

Упражнения

6. Нарисуйте замыкания кос K_1, K_2 (рис. 1). Когда получается одна кривая, а когда несколько? Опишите косы, замыкание которых — одна кривая, т. е. узел.

7. Найдите косу, замыкание которой — узел: а) Y_1 , б) Y_3 , в) Y_4 , г)* Y_2 (см. рис. 9).

Итак, некоторый класс кос (а именно циклические косы, как убедились читатели, проделавшие упражнение 6) при замыкании дают узлы. Все ли узлы могут быть получены таким образом? Оказывается — все!

Замечательный американский математик Дж. Александер доказал в 1925 году, что любой узел является замыканием некоторой косы. Мы не будем подробно доказывать эту теорему, но укажем два основных приема, используемых при ее доказательстве.

Первый прием («раскручивание»). Нарисуем узел, выберем на нем направление и возьмем произвольную точку O вне его. Назовем звено узла *положительным* (относительно точки O), если направление движения по нему видится из точки O слева направо; так все звенья узла кроме AB и FG на рисунке 13, а *положительны*. Узел назовем *положительным* (относительно точки O), если все его звенья *положительны*. Для положительных уз-

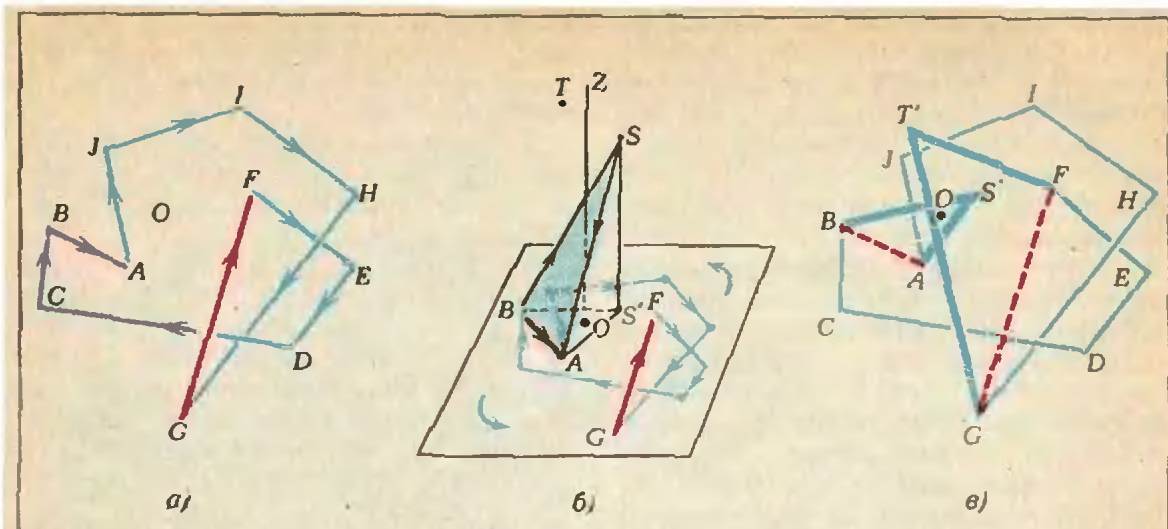


Рис. 13. Превращение узла в положительный: а) диаграмма узла с двумя отрицательными ребрами AB и FG относительно точки O ; б) «Трюк Александра» — замена отрицательного ребра AB на ломаную ASB — уменьшает число отрицательных ребер на единицу; в) двукратное применение трюка Александра превратило узел $ABCDEFGHIJA$ в положительный узел относительно точки O .

лов легко найти косу, замыканием которой он является: нужно разрезать и раскрутить узел так, как показано на рисунке 12.

Второй прием («трюк Александра»). Отрицательные звенья узла (рис. 13, б, в) заменяются на двухзвенные положительные ломаные, охватывающие точку O . После уничтожения всех отрицательных звеньев применяется первый прием.*)

Так доказывается, что каждый узел — замыкание некоторой косы, а косы можно классифицировать. Нельзя ли воспользоваться этим для классификации узлов? Увы, нет. Дело в том, что замыкание разных кос не всегда приводит к разным узлам. Например, коса (из трех нитей), показанная на рисунке 14, не совпадает с косой (из двух нитей) на рисунке 11, но при замыкании тоже дает трилистник (проверьте!).

Таким образом, непосредственно свести классификацию узлов к классификации кос не удастся. Однако теорема Александра — лишь первый шаг замысловатого хода мысли, свя-

зывающего красивейших обитателей трехмерного пространства — косы и узлы.

* * *

В заключение для читателей, которым красота не кажется достаточным основанием для изучения предмета, попробую ответить на вопрос: «А зачем это все нужно?». Отчасти ответ содержится в самой истории возникновения теорий кос и узлов.

Теория кос была создана в двадцатые годы нашего века тогда еще молодым немецким алгебраистом Э. Артином по заказу... ткацкой фабрики: он выполнял, как бы сказали сегодня у нас, хозяйственную работу для этого предприятия.

Истоки теории узлов — более древние, и интересные обстоятельства непосредственного ее возникновения — почти забыты. А дело было так.

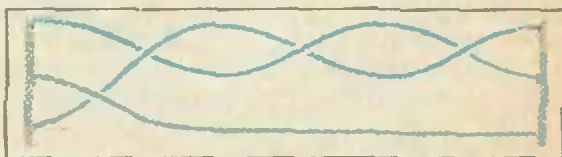


Рис. 14. Замыкание этой косы — тоже узел «трилистник» (сравните с рисунком 11). Проверьте!

* Придирчивый читатель может возразить, что кроме положительных и отрицательных, узел может иметь и звенья, которым нельзя приписать знак. Если такая «неприятность» произошла, нужно слегка пошевелить эти звенья.

Систематическое изучение теории узлов инициировал великий английский физик Дж. Максвелл. Он пришел к выводу, что волны осуществляют электромагнитные взаимодействия, а потом его осенила еще более смелая мысль: сами взаимодействующие частицы — тоже волны; но так как частицы (атомы) очень маленькие, а волны — длинные, волны-атомы должны замыкаться на себя на небольшом участке пространства: это узелки, в памяти которых хранится вся физико-химическая информация об атоме, закодированная в самом характере заузливания атома. Максвелл и его ученики принялись за исследование узлов, начали их систематическую классификацию в виде таблиц.

Эстафету в изучении узлов, уже в нашем веке, приняли математики, притом вполне бескорыстно: их привлекала сама красота предмета. Созданные ими тонкие инварианты (а им будет посвящена статья «Узлы, зацепления и их полиномы» в 4-м номере «Кванта») позволили значительно продвинуться в изучении узлов,

но все же эта область долго оставалась одной из тихих заводей математики, известной в основном специалистам-топологам.

У теории же кос были вполне серьезные приложения, например к комплексному анализу, механике и физике элементарных частиц.

Но совсем недавно, после работ английских математиков Дж. Конвея и В. Джонса, советских — В. Тураева и А. Решетихина, американца Л. Кауффмана, обнаружилось неожиданные и глубокие связи между теорией узлов и кос, абстрактной алгеброй и физикой. Тихая заводь забурлила. Опять физика! Здесь оказались замешаны не только классические ее разделы (статистическая физика, например модель... льда), но и современная квантовая теория. А идея кодирования химической информации в маленьких узелках (и косах!) вновь возникла в молекулярной биологии при расшифровке аминокислот и изучении ДНК. Так что — кто знает — может быть, старая идея Максвелла...

Нам пишут

Ф. П. Гросу из Кишинева исследует решение в натуральных числах уравнения $x^n + y^m = z^k$. Оказывается, если $k \geq n > m$, $x \geq y$ и $k/p = r$ — натуральное число, то решений нет.

Доказательство. Поскольку $x \geq y$, $x^m \geq y^m$ и $x^n + x^m \geq z^k$. Поскольку $(x+1)^n > x^n + x^m$, $(x+1)^n > z^k$. Следовательно, $x > z^p - 1$. С другой стороны, $x = \sqrt[n]{z^k - y^m} < z^p$. Итак, $z^p > x > z^p - 1$, поэтому x не может быть целым числом.

Аналогично доказывается следующее утверждение:

если система уравнений

$$\begin{cases} x^n + y^m = a \\ x^n + y^m = b \end{cases}$$

с $n > m \geq 1$, $a > b$ имеет натуральное решение, то это решение имеет вид

$$x = [\sqrt[n]{a}] \quad y = \sqrt[m]{a - [\sqrt[n]{a}]^n} = \sqrt[m]{b - [\sqrt[n]{a}]^n},$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Например,

$$\begin{cases} x^3 + y^2 = 134 & x = [\sqrt[3]{134}] = 5, \\ x^2 + y^3 = 52 & y = \sqrt{134 - 5^3} = \sqrt{52 - 5^2} = 3. \end{cases}$$

Десятиклассник И. Григорьев из Актюбинска замечает, что для умножения четных чисел на 6 можно воспользоваться формулой $ab \dots xy \cdot 6 = ky$, где $k = ab \dots x + \frac{1}{2} ab \dots xy$.

Этот способ умножения часто проще обычного умножения «в столбик».

В. Е. Коцаков из Ленинграда предлагает следующую игру с числами. Возьмем нечетное натуральное число N и представим его в виде суммы двух слагаемых. По каждому разбиению N в сумму вида $p+q$, где $p < q$, построим новое разбиение вида $(2p)+(q-p)$. Что получится, если продолжать этот процесс? Например, разбиение числа $17 = 1+16$ приводит к цепочке

$$1+16 \rightarrow 2+15 \rightarrow 4+13 \rightarrow 8+9 \rightarrow 16+1.$$

После этого разбиения повторяются. Такие цепочки автор называет петлями. Вот другая петля числа 17:

$$3+14 \rightarrow 6+11 \rightarrow 5+12 \rightarrow 7+10 \rightarrow 3+14.$$

Выписанные петли содержат все разбиения числа 17 в сумму двух слагаемых. Обратите внимание на то, что обе петли имеют одинаковую длину. Это не случайно: все петли простого числа имеют равные длины. Попробуйте сами доказать это утверждение.

В. Е. Коцаков проделал большое количество вычислений и обнаружил числа, имеющие очень много петель. Например, число 65 537 имеет 2048 петель. Подумайте, что будет, если в определении петли числа заменить удвоение умножением на другое фиксированное число.

Наш круглый стол

(Начало см. на с. 2)

Тут речь шла о способах расчета полета популярной игрушки «летающая тарелочка».

Д. Л. Абраров. Сейчас интернат становится подразделением Университета*), осуществляя идею Ломоносова: «При Университете должна быть гимназия». Разумеется, материальное обеспечение должно быть лучше, чем у обычной школы. Пока, к сожалению, наш материально-технический уровень не соответствует уровню преподавания. Например, сейчас у нас 2 класса с вычислительной техникой, а нужно — 4—5. Вхождение в состав МГУ позволит полнее использовать огромный потенциал Университета. Создается полигон для отработки учебных курсов, написания книг, издания литературы — целого спектра учебных пособий, задачник. Ведь сейчас, что греха таить, многие методические находки просто пропадают.

А. А. Егоров. Добавлю к этому, что первые годы существования интерната — это время, когда под руководством А. Н. Колмогорова происходила модернизация школьных программ по математике. И именно в интернате отрабатывались идеи Андрея Николаевича. Он очень хотел написать учебник для интерната. К сожалению, болезнь помешала ему это сделать.

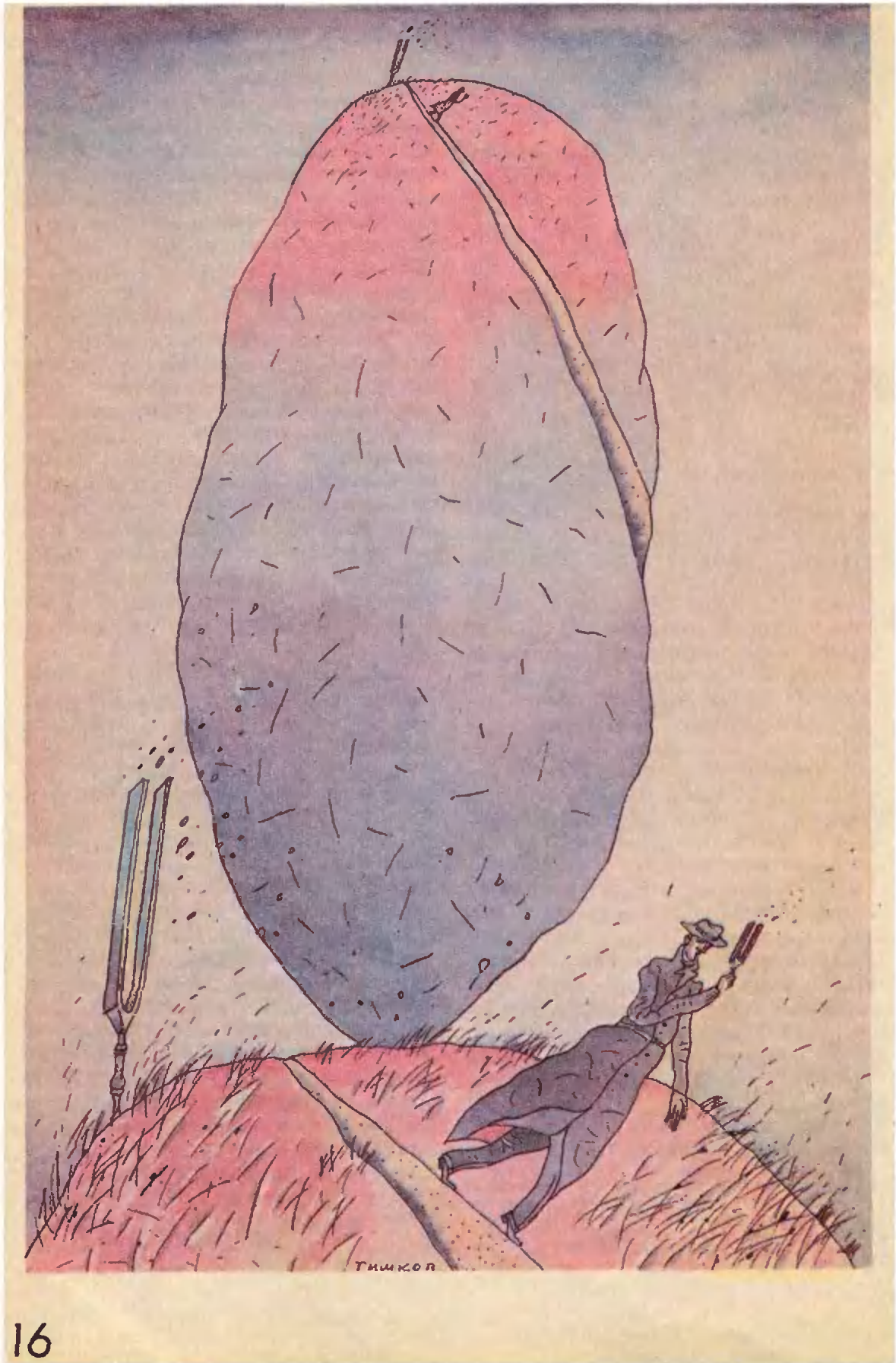
Г. Ш. Фридман. Я участник первой летней школы в Новосибирске. Она прошла летом 1962 года. Более 600 школьников со всех концов страны собрались в Академгородке. Идея такой школы родилась еще в 30-е годы, но не случайно ее удалось реализовать лишь в начале 60-х (время оттепели) — и в Сибири (далеко от Москвы). Школа продолжалась 45 дней! Преподаватели — молодые сотрудники СО АН СССР, аспиранты,

студенты НГУ — замечательное собрание людей. Лекции читали организаторы школы академики М. А. Лаврентьев, Г. И. Будкер, член-корреспондент АН СССР А. А. Ляпунов. Разъехались ребята, кончилась школа... Подумали: а не вернуть ли их назад. М. А. Лаврентьев идею эту принял, одобрил. Нашли здание, способы финансирования. И таким вот образом в январе 1963 года мы начали учиться в ФМШ при НГУ.

Первый научный руководитель школы — А. А. Ляпунов. У нас превосходно преподавались не только математика и физика, но и биология (единственная школа страны, где изучалась генетика!). Издавался рукописный журнал, работал поэтический клуб. А. А. Ляпунов кроме математических курсов читал придуманный им самим интереснейший курс «Землеведение». У себя на дому он проводил занятия кружка по теории множеств, а после занятий, уже за чаем, шли разговоры обо всем: о науке, музыке, живописи, литературе.

В. Н. Дубровский. Я учился в интернате в 1965—67 годах, а с 1969 года, еще будучи студентом, начал преподавать. Дух первых лет школы вспоминаю с огромным удовольствием. Наш любимый лектор и преподаватель А. Б. Сосинский преподавал нам не только математику, но и английский язык. Часть уроков математики шла на английском языке. Вспоминаю вечера «Зеленая лампа»: на них Ю. А. Ким и Е. В. Гайдуков читали стихи символистов, «Мастера и Маргариту», Гумилева, Бальмонта. А какие были уроки литературы Н. И. Герасимова — под его влиянием мы запоем читали, несмотря на очень интенсивные занятия математикой. По-настоящему увлекательны были уроки истории Р. А. Острой. Ее огромные знания, нестандартные подходы, приобщение к исторической литературе (например, «Наполеон» Е. В. Тарле) очень много нам дали: мы знали историю значительно лучше выпускников обычных школ.

*) В октябре 1988 года вышло постановление Совета Министров СССР об организации специализированных учебно-научных центров Московского и Новосибирского государственных университетов, в состав которых вошли соответствующие специализированные школы-интернаты.



ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕЗОНАНСЫ,

или Как звенит планета Земля

Доктор физико-математических наук
П. В. БЛИОХ

«Поющий камень» и собственные частоты резонатора

В окрестностях Баку, там, где начинается каменистая пустыня Кобыстана — «Страны оврагов», есть удивительный камень. Он так прославился, что даже имеет собственное имя — Нагарадаш, т. е. «Каменный бубен» (нагара — азербайджанский ударный музыкальный инструмент, даш — камень). Эта каменная глыба обладает замечательными акустическими свойствами. Если ударять по ней камнем (и все, кто оказываются рядом, продельывают это с большим удовольствием), то раздаётся такой громкий и чистый звук, что кажется, будто ударили по хорошо звучащему колоколу...

Попробуем описать акустические свойства «поющего камня» на языке физики. Понятно, что прежде всего в этом случае речь должна идти о частоте, на которой звучит камень. Посмотрим, как связана частота звуковых колебаний f с размерами «бубна» l .

При ударе происходит кратковременная деформация камня, и от точки удара во все стороны распространяются звуковые волны. Они бегут с определенной скоростью v , которая не зависит от размеров камня. Но волна распространяется беспрепятственно только в однородной безграничной среде, а ведь все предметы имеют границы, где одно вещество соприкасается с другим (в нашем случае — камень с воздухом). Дойдя до границы, волна частично проникает в другую среду (звук из камня проникает в воздух, достигая в дальнейшем наших ушей), а частично отражается назад. Чем больше отличаются скорости звука в двух средах, тем эффективнее происходит его отражение. В граните $v \approx 4 \cdot 10^3$ м/с, а в воздухе $v \approx$

$\approx 3,3 \cdot 10^2$ м/с, поэтому только небольшая часть звуковой энергии выходит в воздух, а основная ее доля оказывается «запертой» внутри камня. (Звук мог бы выйти и в каменистую почву, но «поющий камень», лежащий на других камнях, имеет слабую «акустическую связь» с почвой — он соприкасается с ней только в нескольких точках.)

Такие предметы, внутри которых может быть сосредоточена колебательная энергия, называются резонаторами (от латинского слова *resono* — звучу в ответ, откликаюсь). Если колебания в резонаторе затухают слабо, говорят, что резонатор имеет высокую добротность.

Однако вернемся к тому, что происходит внутри «поющего камня» после удара. Звуковые волны, многократно отражаясь от стенок и интерферируя друг с другом, либо усиливаются, либо взаимно ослабляются. Усиление колебаний происходит в том случае, когда волна, испытав одно или несколько отражений, возвращается в данную точку в той же фазе, с которой начался ее путь. Учитывая, что время прохождения волны вдоль звучащего предмета туда и обратно равно приблизительно $2l/v$, получим условие усиления колебаний: $2l/v \approx nT = n/f$ ($n=1, 2, 3, \dots$ — целое число). Отсюда следует формула для частот, которые называются собственными частотами резонатора:

$$f_n \approx \frac{v}{2l} n. \quad (1)$$

При $n=1$ получается наименьшая, или, как говорят, основная частота $f_1 \approx v/2l$.

Может возникнуть вопрос: почему в формуле (1) равенство приближенное, а не точное? Это легко понять, если вспомнить, что буквой l мы обозначили «размеры» резонатора.

Что это означает для «поющего камня», не очень понятно — то ли длина, то ли высота. Для того чтобы написать точную формулу собственной частоты резонатора, надо знать его формулу.

Рассмотрим, например, простейший «одномерный» резонатор — тонкую натянутую струну. Здесь вопрос о том, что такое l , не возникает — это длина струны между ее закрепленными концами. Поэтому приближенное равенство (1) в случае струны становится точным.*)

В дальнейшем нам понадобится также формула для собственных частот «двухмерного» резонатора — тонкой сферической оболочки радиуса R :

$$f_n = \frac{v}{2\pi R} \sqrt{n(n+1)}. \quad (2)$$

Эта формула похожа на предыдущую: полный путь волны в струне от одного конца до другого и обратно, равный $2l$, заменяется в случае сферы длиной экватора $2\pi R$. С трехмерным (объемным) резонатором дело обстоит несколько сложнее, и мы приведем здесь только выражение для основной частоты собственных звуковых колебаний шара радиусом R :

$$f_1 \approx 0,33 \frac{v}{R}. \quad (3)$$

Видно, что и в этом случае f_1 мало отличается от приближенного значения (1), если считать в последнем $l=R$ и $n=1$.

Резонатор может звучать на разных частотах

В выписанных выше формулах фигурирует целое число n . Пока неизвестно, чему оно равно, нельзя сказать на какой частоте (или на каких частотах) будут происходить колебания. Это зависит от того источника, который поставляет энергию в резонатор. При кратковременном возбуждении (удар) звуковая энергия сама распределяется по собственным частотам,

или гармоникам, которые будут звучать одновременно (в формуле (1) возникает целый набор n). Какие именно гармоники будут возбуждаться сильнее, а какие слабее, зависит от места удара. Поэтому, ударяя по «поющему камню» в разных местах, можно извлечь из него определенную мелодию, т. е. Нагарадаш «работает» как настоящий музыкальный инструмент!

Совсем иначе обстоит дело, если возбуждать резонатор не кратковременным ударом, а непрерывно действующим гармоническим вибратором (источником синусоидальных волн). В этом случае колебания происходят на частоте возбудителя f , которая может отличаться от всех f_n . Однако, когда f совпадает с одной из собственных частот, амплитуда колебаний резко возрастает. В этом заключается суть явления резонанса.

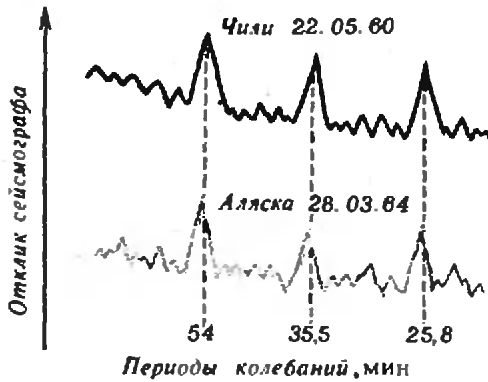
На каких частотах «звонит» Земля?

От «поющего камня» размерами в несколько метров легко перенестись мысленно к огромной скале и еще дальше — ко всей Земле в целом. Интересно разобраться, на каких частотах может «звучать» такой глобальный, т. е. охватывающий всю планету, резонатор и какие источники способны его возбуждать.

Земной шар, имеющий сложное внутреннее строение, окружен еще и атмосферой, верхние слои которой (ионосфера) обладают высокой электрической проводимостью. Учитывая все это, можно ожидать возникновения глобальных резонансов трех типов. Два из них связаны с механическими колебаниями внутри Земли и в ее атмосфере, а третий — с электромагнитными волнами в промежуток между земной поверхностью и ионосферой. Соответственно существуют три серии собственных частот глобального резонатора, которые можно оценить с помощью приведенных выше формул.

Начнем с механических колебаний внутри Земли. Согласно сейсмическим данным, скорость звука (сейсмических волн) в земных недрах воз-

*) Значение f_n зависит, конечно, и от диаметра струны, от свойств материала, от силы натяжения. Но все эти зависимости включены в v , так что мы рассматриваем струны, отличающиеся друг от друга только длиной.



Каждое землетрясение характеризуется своим «почерком» на сейсмограммах, но на определенных частотах, одинаковых для всех землетрясений, наблюдаются резонансные пики, свидетельствующие о возбуждении собственных колебаний Земли.

растает с глубиной от 4—8 км/с у поверхности Земли до 7—13 км/с на нижней границе мантии.*) В ядре скорость звука снова уменьшается. Для оценки основной (наинизшей) собственной частоты сейсмических колебаний Земли воспользуемся формулой (3), положив в ней $v \approx 6$ км/с и $R = 6400$ км. Таким образом находим $f_1 \approx \frac{0,33 \cdot 6}{6,4 \cdot 10^3} \approx 3 \cdot 10^{-4}$ Гц, а соответствующий период — $T_1 \approx 55$ мин.

Услышать «голос Земли», конечно, нельзя из-за очень низкой частоты, но на лентах сейсмографов он должен себя проявить, если только найдется достаточно мощный источник возбуждения. Такими источниками являются землетрясения и взрывы. Каждое землетрясение характеризуется своим «почерком» на сейсмограммах, но в начале 60-х годов нашего века было обнаружено, что на некоторых частотах (одинаковых для всех землетрясений!) наблюдаются резонансные пики, свидетельствующие о возбуждении собственных колебаний Земли. Соответствующие периоды оказались равными 54; 35,5; 25,8; ... мин, что не противоречит оценкам основной частоты f_1 по формуле (3) (хотя последняя, учитывая сложное строение Зем-

ли, является весьма приближенной). Собственные колебания Земли затухают сравнительно медленно. Достаточно сказать, что длительность записей на сейсмограммах после землетрясений может достигать нескольких минут и десятков минут, хотя само событие — землетрясение, взрыв — продолжается несколько секунд или даже доли секунды. Обнаружение собственных колебаний Земли относится к крупнейшим достижениям современной геофизики. С помощью глобальных резонансов, сравнивая расчетные и экспериментальные данные, проверяют правильность тех или иных моделей внутреннего строения нашей планеты.

Атмосфера Земли — это тоже резонатор

Половина всей массы атмосферного воздуха заключена в приземном слое толщиной ~ 6 км, а если подняться на высоту 30 км, то внизу останется уже $\sim 99\%$ всей атмосферы. Поэтому условно можно говорить о «границе» атмосферы. Представим себе, что в каком-нибудь месте «граница» под действием некоторой силы немного приподнялась, после чего сила перестала действовать. Сила тяжести вернет возникший «горб» обратно, но воздух, двигаясь по инерции, опустится еще ниже, и на месте «горба» появится «впадина». Колебания толщи атмосферы распространяются во все стороны от места возмущения в виде волн, подобных тем, которые наблюдаются на поверхности океана. Но поскольку резкой границы атмосферы не существует, волнообразные колебания охватывают всю ее толщу, их называют внутренними гравитационными волнами (ВГВ)*).

Оценку скорости распространения ВГВ по порядку величины можно получить из соображений размерности.

*) Слово «гравитационные» указывает в данном случае на то, что эти волны могут распространяться только в поле тяжести (в отличие от звуковых волн). В физике тот же термин используется и совсем в другом смысле: так называют волны гравитации, которые переносят со скоростью света изменения поля тяготения в вакууме.

*) Внутри Земли могут распространяться звуковые (сейсмические) волны двух типов (продольные и поперечные) с разными скоростями.

В искомую формулу должны войти ускорение силы тяжести g (м/с^2) и характерный масштаб H (м) изменения плотности воздуха с высотой. Из этих двух величин единственным образом образуется третья, имеющая размерность скорости v (м/с): $v \sim \sqrt{gH}$. Поскольку $g \approx 10 \text{ м/с}^2$, а $H \approx 10 \text{ км} = 10^4 \text{ м}$, получаем $v \sim 300 \text{ м/с}$. ВГВ очень слабо затухают и в отличие от звуковых волн способны многократно огибать земной шар. Кругосветные волны в атмосфере (они регистрируются с помощью барометров) впервые были обнаружены в 1883 году после мощнейшего взрыва вулкана на острове Кракатау в Индонезии. Падение Тунгусского метеорита в 1908 году также сопровождалось аналогичными явлениями.

Толщина атмосферы очень мала по сравнению с радиусом Земли, поэтому для оценки собственных частот глобального атмосферного резонатора можно воспользоваться формулой (2). С указанным выше значением v находим основную частоту $f_1 \sim 10^{-5} \text{ Гц}$ и соответствующий период $T_1 \sim 30 \text{ ч}$. Конечно, это всего лишь оценка по порядку величины, но из нее следует, что для возбуждения резонанса необходим источник, способный колебать всю толщу атмосферы с периодом порядка десятка часов. Такими свойствами обладают приливные силы, действующие на атмосферу со стороны Луны и Солнца.*) О приливах в морях и океанах знает каждый, но это явление наблюдается не только на водяных просторах. Существуют приливы и отливы и в твердой коре земного шара, хотя высота приливных волн здесь очень мала (на широте Москвы она равна $\sim 40 \text{ см}$), и в воздушной оболочке, где, наоборот, амплитуда весьма значительна.

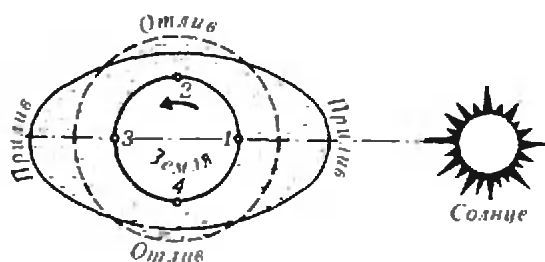
Рассмотрим сначала солнечные приливы. Действие силы притяжения Солнца на атмосферу (так же как и на воду, и на твердую кору) приводит к тому, что вдоль линии, соединяющей

центры Земли и Солнца, возникают два приливных горба, а в поперечном направлении — две впадины (отливы). Допустим, что в исходный момент времени мы находимся в месте максимального прилива — в точке 1 (см. рисунок). Через 6 часов вследствие суточного вращения Земли точка 1 переместится в 2, и в ней будет наблюдаться наиболее сильный отлив, поскольку приливные горбы остаются неизменно на линии Солнце — Земля. Еще через 6 часов точка 2 перейдет в 3, где прилив снова максимален. Таким образом, приливные деформации атмосферы, связанные с Солнцем, имеют период $T_{\odot} = 12 \text{ ч}$. Аналогичным образом действует на атмосферу и Луна, но за счет ее собственного вращения вокруг Земли возникает несколько иной период приливных деформаций — $T_{\text{л}} \approx 12,4 \text{ ч}$. Поскольку Луна гораздо ближе к Земле, чем Солнце, связанные с нею приливные силы должны быть согласно расчетам в 2,5 раза сильнее солнечных.

Для океанских приливов этот вывод хорошо подтверждается на практике. Однако наблюдение приливов в атмосфере (они проявляются, в частности, в виде регулярных периодических колебаний атмосферного давления в тропиках с амплитудой $\sim 2 \text{ мм рт. ст.}$) показывает, что амплитуда «солнечных» приливов (с 12-часовым периодом) примерно в 16 раз больше, чем «лунных». Следовательно, наблюдаемое соотношение амплитуд двух приливных возмущений атмосферы (солнечного и лунного) отличается от расчетного в 40 раз! Столь большое расхождение показывает, что в теоретических рассуждениях упущено что-то существенное.

Гипотеза, объясняющая преобладание солнечных атмосферных приливов, была высказана впервые в конце прошлого века английским физиком У. Томсоном (впоследствии он получил титул лорда Кельвина). Суть ее заключается в следующем. Если период собственных колебаний атмосферы равен в точности 12-ти часам, то действие солнечной приливной силы (с 12-часовым периодом) приводит

*) О природе приливов и отливов можно прочитать в статье Л. Г. Асламазова «Лунный тор-моз» в 8-м номере «Книжки» за 1987 год.



Действие силы притяжения Солнца приводит к тому, что вдоль линии Земля — Солнце возникают два приливных горба, а в поперечном направлении — две впадины (отливы).

к резонансу — резкому увеличению амплитуды колебаний атмосферы. Наши очень приблизительные оценки T_1 не годятся для проверки резонансной гипотезы, поэтому следует обратиться к экспериментальным данным. Период собственных колебаний атмосферы был определен на основе наблюдений за теми кругосветными волнами давления, которые возникли после взрыва вулкана Кракатау и падения Тунгусского метеорита, о чем мы уже упоминали. Найденный таким образом период T_1 оказался равным 10,5 ч. Это значение не противоречит нашей грубой оценке T_1 по порядку величины, но совершенно не согласуется с предположением о резонансе. Казалось бы, резонансную гипотезу следует отбросить. Но в конце 30-х годов нашего века она снова возродилась, в более сложном варианте.

Главной особенностью новой теории является предположение о двух периодах собственных колебаний атмосферы: $T_{1н} = 10,5$ ч — для нижних слоев и $T_{1в} = 12$ ч — для верхних (выше ~ 50 км). Если это действительно так, то можно представить себе, что взрывы на поверхности Земли возбуждают короткопериодные колебания атмосферы, а приливы, охватывающие всю толщу атмосферы, — долгопериодные. Однако чем изолированы друг от друга нижние и верхние слои? Роль барьера между ними может играть слой воздуха с повышенной температурой, который слабо пропускает ВГВ снизу вверх, а те волны, которые возникли наверху, не пропускает вниз.

Расчеты показывают, что 12-часовой период колебаний в верхней атмосфере может возникнуть, если температура воздуха на высоте 50—60 км достигает 320—340 К. После этого максимума температура спадает, а начиная с высоты 80—100 км снова растет. Прямые измерения, которые стали возможными с появлением метеорологических ракет, подтвердили наличие предсказанного максимума! Однако возрастание температуры оказалось не столь значительным ($T_{\text{макс}} \approx 270—280$ К), как это следует из резонансной теории.

Таким образом, теория наблюдаемых периодических полусуточных изменений параметров атмосферы пока полностью не завершена.

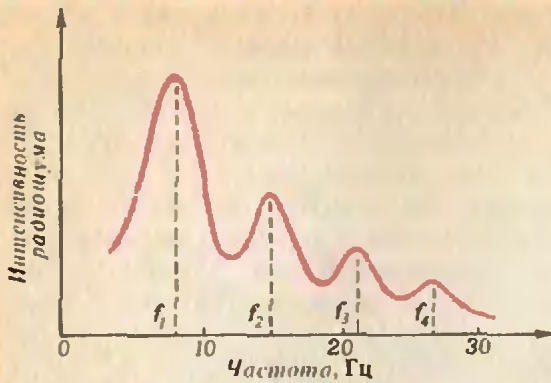
Глобальные электромагнитные резонансы

Под действием солнечного излучения в верхних слоях атмосферы происходит ионизация атомов и молекул, появляются свободные заряды, и электропроводность воздуха, начиная с высоты 50—60 км, сильно возрастает. Здесь начинается ионосфера, которая на больших расстояниях от Земли «смыкается» с межпланетным пространством. Нижние слои атмосферы толщиной в несколько десятков километров обладают очень малой электрической проводимостью по сравнению с земной корой и ионосферой. Таким образом, вокруг поверхности земного шара существует тонкий сферический слой, вдоль которого могут распространяться электромагнитные волны (радиоволны). Каковы собственные частоты этого сферического резонатора? Ответ снова дается с помощью формулы (2), но с заменой в ней скорости звука v на скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В результате получается следующий набор собственных частот глобального электромагнитного резонатора:

$$f_n = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{n(n+1)}}{2 \cdot 3,14 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \approx$$

$$\approx 10,6; 18,3; 25,9; \dots \text{ Гц.}$$

Основным источником возбуждения резонатора служат молнии. На всем

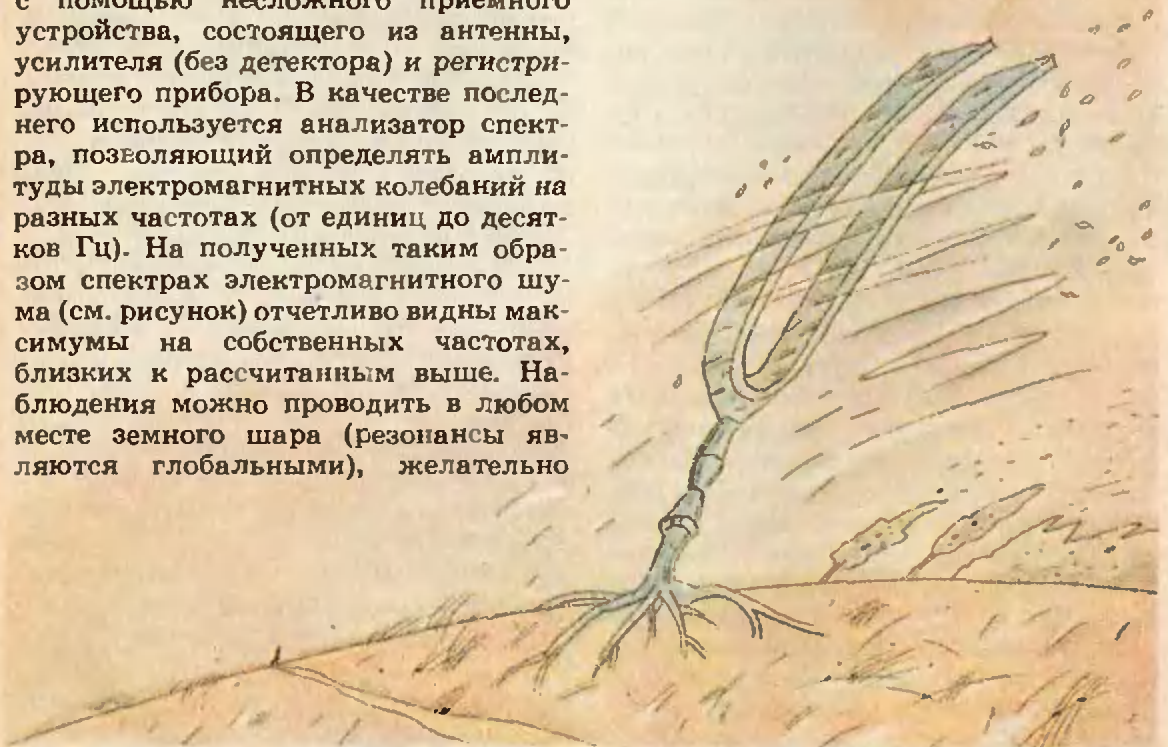


На спектре электромагнитного шума отчетливо видны максимумы, соответствующие собственным частотам глобального электромагнитного резонатора Земля — ионосфера.

земном шаре в каждый данный момент времени бушуют тысячи гроз, каждую секунду вспыхивает в среднем около 100 молний. После каждого разряда резонатор Земля — ионосфера «звенит» подобно колоколу на собственных частотах. Но не успеет этот «звон» затихнуть, как происходит следующий разряд, и колебания возникают заново. Поскольку вспышки молний происходят случайно, их непрерывная последовательность возбуждает в резонаторе электромагнитный шум, который легко обнаружить с помощью несложного приемного устройства, состоящего из антенны, усилителя (без детектора) и регистрирующего прибора. В качестве последнего используется анализатор спектра, позволяющий определять амплитуды электромагнитных колебаний на разных частотах (от единиц до десятков Гц). На полученных таким образом спектрах электромагнитного шума (см. рисунок) отчетливо видны максимумы на собственных частотах, близких к рассчитанным выше. Наблюдения можно проводить в любом месте земного шара (резонансы являются глобальными), желательно

только вдали от источников промышленных помех.

Глобальные электромагнитные резонансы были предсказаны и обнаружены в 50-х годах нашего века и в настоящее время используются для изучения грозовой активности и свойств нижних слоев ионосферы. Огромным преимуществом этого метода является возможность получения данных в масштабах всего земного шара путем наблюдений в одном каком-нибудь месте. Кроме того, измерения не требуют больших затрат и никак не влияют на окружающую среду, так как необходимые для них мощные передатчики — молнии — обеспечиваются «бесплатно» самой природой.



ПРАВИЛО ФАЗ ГИББСА

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

Просто удивительно, сколько интересных вопросов может возникнуть при наблюдении самых обычных явлений. Ну, например... Почему лед и вода, не превращаясь друг в друга, существуют только при 0 °С? Чуть изменится температура — и либо лед начнет таять, либо вода начнет замерзать. Для нас это, конечно, счастливое обстоятельство, ведь иначе слякоть и гололед случались бы значительно чаще. И все же: почему это так? Сразу, разумеется, не ответишь, зато первый вопрос вызывает цепочку других. Услужливая память подсказывает, что у воды существует и третье «обличье» — водяной пар. Так вот, могут ли вода, пар и лед существовать в одном сосуде одновременно, не превращаясь друг в друга? Скорее всего, ответ на этот вопрос вы знаете. Но возьмите любой элемент из таблицы Менделеева. Почти каждый может существовать и в жидком, и в твердом, и в газообразном состоянии. А одновременно, в одном сосуде?

Как вы уже догадались, в этой статье мы попытаемся ответить на эти и многие другие вопросы. Для этого давайте попробуем пройти узкой тропинкой удивительных выводов, которую более 100 лет назад открыл великий американский физик Джозайя Виллард Гиббс.

Что такое фаза?

Слово «фаза» имеет множество значений. Интересующее нас введено в практику Гиббсом. Чтобы понять, что же такое фаза по Гиббсу, начнем с примеров.

Эта статья появилась в процессе работы автора над книгой «Репортаж из мира сплавов», которая будет выпущена в этом году издательством «Наука» в серии «Библиотечка «Квант». Советуем вам не пропустить эту книгу. Из нее вы узнаете о том, как развивалась наука о металлах, как придумывали сплавы наши далекие предки и как это делается сегодня, о таинственных превращениях сплавов и их затравленном дне.

При 0 °С в уличных лужах появляются кусочки льда. Первоначально однородная система — жидкая вода — распадается на две части. Их называют двумя разными фазами химического соединения H₂O. То же самое соединение может существовать и в виде третьей фазы — водяного пара.

Жидкость, кристалл и пар — самые привычные примеры разных фаз одного вещества. Однако фазы не обязательно различаются между собой именно агрегатным состоянием. Хорошо известны две твердые фазы углерода — графит и алмаз. Они имеют разные кристаллические решетки, и это приводит к колоссальному различию их свойств. Фазы могут отличаться друг от друга и по своему химическому составу, и по магнитным характеристикам (магнитная и немагнитная), и по электрической проводимости (нормальная и сверхпроводящая), и по другим свойствам.

Теперь попытаемся ввести понятие фазы более строго. За основу возьмем лаконичное определение академика М. А. Леонтовича: «В термодинамике фазой называется всякая однородная система, т. е. тело, физические свойства которого во всех точках одинаковы». Здесь надо отметить несколько тонкостей.

Во-первых, говоря о «теле», мы всегда подразумеваем, что оно состоит из большого количества микрочастиц — атомов или молекул. Как правило, мерой «большого количества» служит число Авогадро — $6 \cdot 10^{23}$.

Фигурирующую в определении «однородность» тоже надо понимать на уровне «большого числа» частиц, а не отдельных атомов или молекул. Воздух — однороден и является однофазной системой, хотя и состоит из разных молекул.

В многофазной системе однородность теряется, как это было в случае льда и воды. Между разными фазами



Фотографии фазовых структур стали и бронзы, сделанные с помощью микроскопа.

одной системы обычно существует четко выраженная поверхность раздела. Приведем здесь еще один пример. Возьмите емкость с подсолнечным маслом и накапайте туда воду. Жидкости не смешаются. Вода в масле образует свою отдельную фазу. Поверхность раздела между двумя фазами будет отчетливо видна.

Не всегда неоднородность системы и поверхность раздела видны невооруженным глазом. Сталь, например, выглядит вполне однородно, и лишь с помощью микроскопа убеждаешься в ее многофазности.

При изменении внешних условий (температуры, давления, электрического или магнитного полей) фазы могут превращаться друг в друга (это вполне понятно уже на примере воды, пара и льда). Эти процессы так и называются — фазовые превращения.

Знакомство с фазовыми диаграммами

Начнем изучение фазовых превращений все с той же чистой воды. Для этого заключим ее в герметичный сосуд с поршнем, где ее состоянием легко управлять, меняя внешнее давление на поршень и нагревая или охлаждая сосуд. Важно понять, что никаких других способов воздействовать на фа-

зовое состояние воды в сосуде, его при этом не открывая, у нас нет.*) Поэтому все «события», связанные с фазовыми превращениями в замкнутом сосуде, должны быть функцией только p и T .

Обратим внимание на одно обстоятельство: если во внешней среде поддерживается постоянная температура T , то через некоторое время такая же температура установится во всех фазах системы. Это положение подтверждается нашим каждодневным опытом — при наличии контакта температуры разных тел выравниваются.

То же самое справедливо и в отношении давления, но с одной оговоркой: давление в разных фазах одинаково и равно внешнему, если все поверхности раздела между фазами плоские.**) Тогда равенство давлений сразу следует из механического равновесия поверхности раздела. Если же поверхности раздела имеют конечный радиус закругления, то приходится принимать во внимание и силы поверхностного натяжения. Однако в

*) Сосуд можно помещать в электрическое поле, в магнитное, но эти случаи в дальнейшем рассматриваться не будут.

**) В жидкой (да и в газообразной) фазе существует гидростатическое давление, но мы будем вести разговор о ситуации, когда оно много меньше общего для системы давления p .

дальнейшем мы будем предполагать, что границы фаз всегда плоские. С учетом этих замечаний состояние системы характеризуется общими для всех фаз значениями давления и температуры.

Прежде всего желательно выяснить, при каких внешних условиях происходит фазовое превращение. Для определенности остановимся на испарении воды. Если зафиксировать нормальное атмосферное давление, то вода в нашем сосуде начнет испаряться при 100 °С. При более низких температурах поршень в сосуде будет «лежать» на воде, и пара в системе не будет.

Изменив давление, мы изменим и температуру начала испарения. Можно свести все данные о фазовом превращении в таблицу из двух колонок: в одной указывать давление, а в другой — температуру начала испарения. Но еще удобнее изобразить данные таблицы графически в виде зависимости температуры от давления (рис. 1). Точно так же можно в виде графиков представить данные и о двух других фазовых превращениях, которые могут происходить в системе, — превращениях вода ⇌ лед и лед ⇌ пар. В результате получим такую диаграмму, как на рисунке 2.

Подчеркнем одно важное обстоятельство. Линии на диаграмме отделяют друг от друга области устойчивого существования соответствующих фаз. Это отнюдь не означает, будто каждая фаза «живет» только в своей области и не может «залезать» в чужую. Разумеется, может. Мы регулярно наблюдаем это, скажем, весной, когда уже при положительной темпе-

ратуре реки еще полны льдин. Но такое состояние не является устойчивым — лед в реке тает. Этот процесс происходит не мгновенно, а с какой-то конечной скоростью. Через несколько дней (если вновь не ударят морозы) лед обязательно растает весь, до конца. А вот вода при тех же условиях уже никогда снова не станет льдом.

Если состояние системы перестает меняться во времени, говорят, что в ней установилось равновесие. Диаграмма на рисунке 2 предсказывает только равновесное состояние системы.

Подобные диаграммы называют фазовыми. Ими очень удобно пользоваться: зная температуру и давление, сразу определяем, из каких фаз система будет состоять в равновесии. Определенным значениям давления и температуры на диаграмме соответствует точка. Если она попадает в области устойчивого существования пара, льда или жидкости, то в равновесии система будет состоять из одной соответствующей фазы. Если точка оказывается на линии диаграммы, система в равновесии будет состоять из двух фаз. Из каких именно? Совершенно очевидно: если, например, это — линия раздела «водной» и «ледяной» областей, то из льда и воды. И наконец, при единственном сочетании давления и температуры в равновесии будут находиться все три фазы.

Правило фаз в однокомпонентных системах

Не почувствовали вы по диаграмме воды, что имеются какие-то законы, регламентирующие «условия жизни»

p	t
p_1	t_1
p_2	t_2
p_3	t_3
...	...

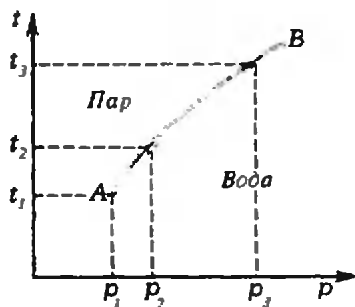


Рис. 1.

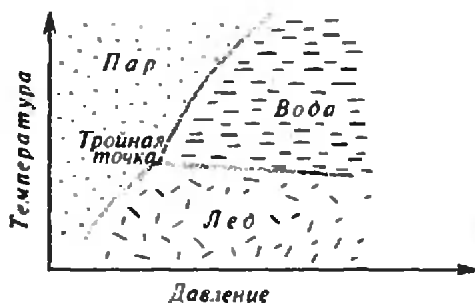


Рис. 2.

фаз? Посудите сами: в однофазном состоянии система может существовать в широком диапазоне давлений и температур, в двухфазном — только при их определенных комбинациях, а трехфазная область на диаграмме вообще стягивается в точку. Так и хочется представить фазы в роли жильцов коммунальной квартиры: чем больше жильцов, тем меньше свободы у каждого из них. Впрочем, нельзя делать выводы на основании диаграммы одного-единственного вещества. А вдруг в другом все по-другому?

И все-таки закон совместного существования фаз действительно есть. По имени своего первооткрывателя он называется правилом фаз Гиббса.

Во всех биографиях американского физика-теоретика Дж. Гиббса (1839—1903) подчеркивается, что жизнь этого человека была внешне бедна событиями. Все его силы были сконцентрированы на получении научных результатов, блеск которых не потускнел и сегодня. Со времени опубликования последней работы Гиббса прошло более 80 лет, а результаты его исследований продолжают использоваться в практически неизменном виде.

Правило фаз всегда считалось одним из самых значительных достижений Гиббса. Строгий вывод правила достаточно сложен. Мы приведем его в существенно упрощенном виде.

Начнем рассмотрение все с той же воды, находящейся в замкнутом сосуде.* Предположим, что при данных значениях p и T в равновесии находятся жидкая фаза и пар. Молекулы H_2O в паре и в жидкости находятся в непрерывном тепловом движении. В результате некоторые из них покидают свою «родную» фазу и попадают в соседнюю. Среднее количество молекул, которые улетают за единицу времени через единицу площади из жидкости, обозначим $q_{ж}$. От чего может зависеть это число? Как уже отмечалось, положение дел в замкнутом сосуде зависит лишь от устанавливае-

мых извне давления и температуры. Поэтому величина $q_{ж}$ также должна зависеть только от них:

$$q_{ж} = q_{ж}(p, T).$$

И совершенно аналогично для пара

$$q_{п} = q_{п}(p, T).$$

Явный вид этих зависимостей нам неизвестен. Он различен для разных веществ, а мы пытаемся установить общие закономерности. Вода выбрана только в качестве удобного примера, но никаких ее конкретных свойств использовано не будет. Для нашего рассмотрения важно лишь существование зависимостей, а не их явная форма.

Итак, молекулы, покидающие пар, переходят в жидкость, и наоборот. Если

$$q_{ж}(p, T) > q_{п}(p, T),$$

то паровая фаза будет расти за счет жидкой — преобладает процесс испарения. Если же

$$q_{ж}(p, T) < q_{п}(p, T),$$

то жидкая фаза будет «съедать» паровую — преимущества за конденсацией. Наконец, когда число молекул в каждой из фаз не меняется со временем, т. е. когда

$$q_{ж}(p, T) = q_{п}(p, T),$$

жидкая и паровая фазы находятся в равновесии.

На фазовой диаграмме последнему уравнению соответствует линия равновесия жидкость — пар. Если бы явный вид зависимостей $q_{ж}(p, T)$ и $q_{п}(p, T)$ был известен, то с помощью этого уравнения можно было бы производить практические расчеты фазовой диаграммы. Например, подставив в уравнение значение нормального атмосферного давления и решив его, получили бы для температуры равновесия значение $100^\circ C$.

Теперь пора ввести новое понятие — число степеней свободы. Так в термодинамике принято называть количество внешних параметров, которые в некоторых пределах можно независимо друг от друга менять, не меняя при этом фазового состояния системы. В изучаемом нами случае внешних параметров всего два — давление и

*) Хотя вода состоит из водорода и кислорода, это — пример однокомпонентной системы, так как элементы находятся в соединенном состоянии (молекулы H_2O).

температура. А теперь взгляните еще раз на фазовую диаграмму воды (рис. 2). Каждому однофазному состоянию соответствует некоторая площадь, в пределах которой можно свободно варьировать оба параметра. Например, воду как таковую (жидкую) можно нагреть или приложить к ней внешнее давление, или сделать то и другое одновременно (все это, конечно, в некоторых пределах), и при этом фазовое состояние системы в сосуде не изменится — вода так и останется водой. То же самое справедливо в случае льда или пара. Можно сделать вывод, что однофазная система имеет две степени свободы.

Совсем другая ситуация при двухфазном равновесии. Имеется уравнение, связывающее оба внешних параметра. В случае равновесия жидкость — пар мы его уже записывали: $q_{ж}(p, T) = q_{п}(p, T)$. Поэтому свободно менять можно уже только один параметр, а другой надо «подстраивать» к нему в соответствии с уравнением. Если же мы станем менять оба параметра независимо друг от друга, то «соскочим» с линии фазового равновесия и одна из фаз исчезнет — фазовое состояние системы изменится. Поэтому состояние двухфазного равновесия имеет всего одну степень свободы.

Перейдем теперь к трехфазному равновесию, добавив к воде и пару лед. Предположим, что фазы в сосуде расположены так, как показано на рисунке 3. Учтем, что число молекул, покидающих за единицу времени через единицу площади лед, также будет функцией давления и температуры — $q_{л} = q_{п}(p, T)$, и запишем условие равновесия фаз:

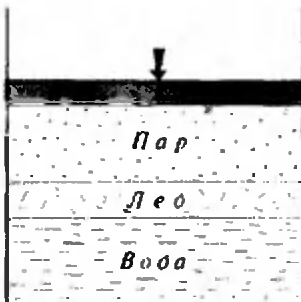


Рис. 3.

для равновесия пар — лед —

$$q_{п}(p, T) = q_{л}(p, T),$$

для равновесия лед — вода —

$$q_{ж}(p, T) = q_{л}(p, T).$$

Легко понять, что аналогичные равенства можно записать для любого взаимного расположения фаз. Обычно их сразу записывают в сокращенной форме

$$q_{п}(p, T) = q_{л}(p, T) = q_{ж}(p, T).$$

Решение последней системы из двух уравнений с двумя неизвестными определит то сочетание давления и температуры, при котором в равновесии могут находиться все три фазы. Ясно, что число степеней свободы трехфазного равновесия равно нулю.

Если бы мы стали рассматривать четырехфазное равновесие однокомпонентной системы, уравнений стало бы уже три —

$$q_{I}(p, T) = q_{II}(p, T) = q_{III}(p, T) = q_{IV}(p, T),$$

а неизвестных по-прежнему осталось бы два. Система из трех уравнений с двумя неизвестными в общем случае решения не имеет. Поэтому максимальное число фаз, которые могут находиться в равновесии в однокомпонентной системе, равно трем.

Содержание этих закономерностей и составляет суть правила фаз Гиббса: в однокомпонентной системе число степеней свободы S просто связано с числом фаз Φ , находящихся в равновесии, —

$$S = 3 - \Phi \quad (S > 0).$$

Взгляните на три диаграммы состояния однокомпонентной системы, приведенные на рисунке 4. Не вдаваясь в рассмотрение конкретных веществ, для которых они построены, можно сразу утверждать их ошибочность. На первой диаграмме существует точка четырехфазного равновесия. На второй трехфазное равновесие имеет две степени свободы. На третьей — две степени свободы имеет двухфазное равновесие. Говоря словами одного из персонажей А. П. Чехова, «этого не может быть, потому что этого не может быть никогда». Правило фаз категорически запрещает такие ситуации.

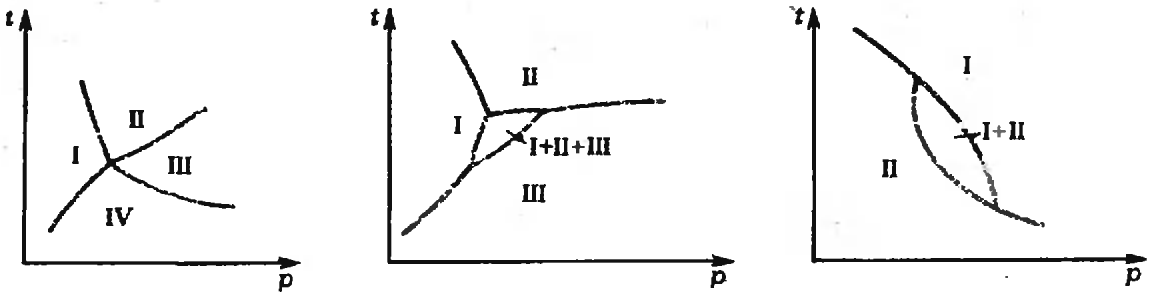


Рис. 4.

А теперь посмотрите на рисунок 5, где изображена диаграмма состояния висмута. Римскими цифрами обозначены его пять различных кристаллических фаз. Можете сами убедиться, что несмотря на довольно сложный вид диаграммы, ни один из ее участков не противоречит правилу фаз.

Правило фаз для многокомпонентных систем

Чистая вода, чистый висмут или какое-либо иное чистое вещество встречаются сравнительно редко. Значительно чаще приходится иметь дело с различными многокомпонентными системами. Например, с растворами. Простейший пример раствора — сладкая вода, состоящая из двух компонентов — сахара и воды, каждый из которых представлен своим типом молекул.

Чтобы описать состояние раствора, нужно, помимо температуры и давления, указать относительное содержание всех компонентов, т. е. их концентрации. Понятно, что в системе, состоящей из K компонентов, следует указать значение $(K-1)$ концентрации.

Для фаз, находящихся в равновесии, температура и давление — общие (одинаковые) параметры. А вот равенство концентраций ниоткуда не следует. Более того, легко привести пример противоположного толка. Если в чай положить слишком много сахара, то он не размещается даже при длительной и интенсивной работе ложечкой. Установится двухфазное равновесие жидкого сладкого чая и лежащего на дне твердого сахара. Понятно, что концентрации компонентов в каждой из двух фаз совершенно различны.

Учтя это обстоятельство, попробуем описать ситуацию математически.

Предположим, что в системе из K компонентов в равновесии находятся Φ фаз. Теперь условия равновесия следует записать для каждого компонента:

$$q_I^{(1)} = q_{II}^{(1)} = q_{III}^{(1)} = \dots = q_{\Phi}^{(1)},$$

$$q_I^{(2)} = q_{II}^{(2)} = q_{III}^{(2)} = \dots = q_{\Phi}^{(2)},$$

$$q_I^{(K)} = q_{II}^{(K)} = q_{III}^{(K)} = \dots = q_{\Phi}^{(K)}$$

(нижний индекс обозначает номер фазы, а верхний — номер компонента). Эта система равенств является непосредственным обобщением условий равновесия в однокомпонентной системе.

Каждая из величин q должна зависеть от общих давления и температуры — от p и T — и от $(K-1)$ концентрации в своей фазе. Таким образом, общее число параметров, которые надо указать, чтобы описать равновесие, равно $2 + (K-1)\Phi$. А теперь подсчитаем общее число уравнений в последней системе. Для каждого компонента оно равно $(\Phi-1)$, а всего компонентов K . Итак, получаем $K(\Phi-1)$.

Каждое из уравнений дополнительно связывает между собой параметры,



Рис. 5.

описывающие состояние системы, и тем самым понижает число степеней свободы. Так что в многокомпонентной системе число степеней свободы равно общему числу параметров минус количество уравнений:

$$C = 2 + (K - 1)\Phi - K(\Phi - 1) = 2 - \Phi + K.$$

(Для $K=1$ (однокомпонентная система) получим уже известное нам равенство $C=3-\Phi$).

Поскольку число степеней свободы по смыслу должно быть неотрицательным, из правила фаз сразу следует, что максимальное количество фаз, которые могут находиться в равновесии в K -компонентной системе, равно $2+K$.

Правило фаз выводилось для замкнутой системы. Но, строго говоря, такого почти никогда не бывает. Система обычно находится в контакте с внешней средой, с которой может происходить обмен атомами или молекулами. Иногда с этим приходится считаться. Однако в подавляющем большинстве случаев этим обстоятельством можно безболезненно пренебречь.

Из правила фаз следует очень много интересных выводов. Наверное, вы теперь без труда объясните, почему температура равновесия вода — лед строго фиксирована. Но если мы имеем дело не с чистой водой, а с каким-нибудь водным раствором, то равновесие вода — лед (не чистые!) при фиксированном внешнем давлении «захватит» целый диапазон температур. Почему это так, постарайтесь объяснить сами на основании правила

фаз. Еще один пример того же рода: чистые металлы плавятся при фиксированных температурах, а их сплавы — в некотором температурном интервале. В частности, чистая медь плавится при 1083°C . А сплав, состоящий на 95 % из меди и на оставшиеся 5 % из мышьяка, плавится (т. е. существует в виде смеси жидкого расплава и кристалла) от 800 до 1050°C .

* * *

На примере правила фаз можно понять исключительные возможности, которые предоставляет исследователю теория. Не используя практически никакой информации о конкретных веществах, нам удалось узнать некоторые общие закономерности фазовых превращений. А это интересно не только для физиков. Фазовые превращения имеют огромное значение с точки зрения практики. Вызывая или, наоборот, тормозя их, можно управлять свойствами вещества.

Арсенал орудий труда у Гиббса был очень скромный — перо да бумага. Но ими он сумел сделать немало. Здесь уместно вспомнить крылатые слова Людвиг Больцмана: «Нет ничего практичнее хорошей теории». На рубеже XIX и XX веков абстрактные идеи Гиббса о равновесиях в сложных системах (в том числе и правило фаз) были восприняты широким кругом ученых и инженеров и материализовались в промышленных процессах химии и металлургии. Происходило это бурно, иногда драматично. Но... это уже другой рассказ.

ЗФМШ при Калининском университете

На базе физического факультета молодого Калининского государственного университета создается Заочная всесоюзная физико-математическая школа для старшеклассников.

Тем, кому не хватает страниц учебников, кто хочет глубже разобраться в вопросах физики и математики, с удовольствием

помогут студенты нашего университета под руководством опытных преподавателей. Для этого необходимо только ваше желание. В своем заявлении сообщите о себе следующие сведения:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Год рождения.
3. Город, школа и класс, в котором вы учитесь.

4. Свой домашний адрес. Всем, обратившимся к нам, мы вышлем первое задание, которое будет вступительным. Ждем ваших заявлений до 1 мая 1989 г. Начало занятий 1 сентября.

Успешно прошедшим курс обучения будут даны значки и свидетельства об окончании школы.

Наш адрес: 170002 г. Калинин, ул. Желябова, д. 33, физический факультет КГУ, ЗФМШ.

БУРСАЦКОЕ РАЗВЛЕЧЕНИЕ,

*или Три трактовки
действий, совершаемых
бурсаком по кличке Цапля*

И. Ф. АКУЛИЧ



Откроем первоисточник...

...которым является книга Н. Г. Помяловского «Очерки бурсы». Речь пойдет о простой с виду задачке, внезапно возникшей при чтении книги.

В первом из очерков, озаглавленном «Зимний вечер в бурсе», один из бурсаков, зовут которого Цапляй, во время скучного урока совершает следующие действия (цитируем): «Цапля со всеусердием пишет что-то; со стороны посмотреть, он прилежнейший ученик, а между тем он вот что делает: напишет цифру, под ней другую, потом умножит их, под произведением опять подпишет первую цифру, опять умножит числа и т. д.; работает, желая знать, что из этого выйдет».

Вот давайте и зададим себе простой вопрос: «Так что же из этого выйдет?» Этот вопрос влечет за собой другой: «Что именно делал бурсак, как трактовать его действия?» Автор попросил своих знакомых объяснить, чем занимается Цапля. Каждый опрошенный заявлял, что ему все предельно ясно и давал разъяснение, которое отличалось от предложенных остальными. Тем не менее после ряда уточнений автору удалось свести все трактовки к трем, которые и предлагаются вашему вниманию.

Трактовка первая, самая неинтересная

Кстати, большинство опрошенных выбрали именно ее. Последовательность чисел x_n строится по такому правилу: x_0 и x_1 задаются заранее и $x_n = x_{n-1}x_0$ при $n \geq 2$.

С этой трактовкой нет проблем. Поскольку каждый последующий член получается умножением предыдущего на одно и то же число, возникает обыкновенная геометрическая прогрессия: $x_n = x_1x_0^{n-1}$. Последовательности такого типа настолько хорошо изучены, что здесь просто нечего добавить: каждый легко определит не только величину произвольного члена, но и без труда подсчитает, например, сумму первых n членов, а то и всей последовательности (если $x_0 < 1$).

Трактовка вторая, более интересная

Людей, выбравших такую трактовку, было значительно меньше. Они полагали, что бурсак умножал только что полученное произведение на предыдущее: $x_2 = x_1x_0$, $x_3 = x_2x_1$, $x_4 = x_3x_2$. Это, действительно, интереснее. Ну-ка, попробуем выразить несколько первых членов последовательности через x_0 и x_1 :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1x_0; & x_3 &= x_2x_1 = (x_1x_0)x_1 = x_1^2x_0; \\ x_4 &= x_3x_2 = (x_1^2x_0)(x_1x_0) = x_1^3x_0^2; \\ x_5 &= x_4x_3 = (x_1^3x_0^2)(x_1^2x_0) = x_1^5x_0^3. \end{aligned}$$

Пожалуй, хватит. Поскольку при перемножении степеней их показатели складываются, здесь просто обязаны возникнуть знаменитые числа Фибоначчи! Так оно и есть. Присмотревшись к членам последовательности x_n , мы легко обнаружим, что $x_n = x_1^{u_n}x_0^{u_n-2}$, где u_n — последовательность Фибоначчи, задаваемая условиями $u_0 = u_1 = 1$ и $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ при $n \geq 2$ *). Числа Фибоначчи сами по себе очень интересны, и об этой последовательности написано столько, что по обширности специальной литературы с ней может соперничать разве что Великая теорема Ферма. Исследование поведения последовательности x_n — интересная задача (мы считаем x_0 и x_1 произвольными положительными числами, не обязательно целыми). Попробуйте найти зависимость предела последовательности x_n при $n \rightarrow \infty$ от x_0 и x_1 (ответ вы найдете в конце номера).

Трактовка третья и, пожалуй, самая интересная

Эту трактовку дал всего один человек — к сожалению, не автор этой статьи. Суть ее такова. Каждый раз под произведением бурсак записывает первую цифру этого произведения и производит очередное перемножение. Например:

$$9 \cdot 8 = 72; \quad 72 \cdot 7 = 504; \quad 504 \cdot 5 = 2520$$

и т. д.

То есть значение x_0 считаем извест-

*) См., например, «Калейдоскоп «Кванта» в № 3 за 1988 год.

ным и x_n при $n \geq 1$ равно произведению первой цифры числа x_{n-1} на x_{n-1} .

Здесь сразу требуется уточнение: а если исходное число меньше 1, то что является его первой цифрой? Ноль? Нет, это не очень интересно. Более естественно считать первой цифрой числа его первую значащую цифру (например, для числа 0,00248 его первой цифрой будет 2).

Начнем рассуждать. Последовательность x_n — неубывающая (почему?). Возможны два варианта ее поведения:

1. В ней встретится число, начинающееся с единицы, и тогда все следующие члены будут равны. Те значения x_0 , для которых это происходит, назовем *устойчивыми*.

2. В последовательности x_n никогда не встретится число, начинающееся с единицы, и она будет неограниченно возрастать. Соответствующие x_0 назовем *неустойчивыми*.

Ну-ка, скажите сразу: а существуют ли вообще неустойчивые числа? Наверное, нет; ведь кажется нереальным, чтобы в такой странном образом организованной последовательности, как x_n , не встретилось рано или поздно число, начинающееся с единицы. Однако первое впечатление, как мы увидим, обманчиво.

Рассуждаем дальше. Умножение или деление исходного числа на 10 не влияет на его устойчивость. Действительно, перенос десятичной запятой вправо или влево не меняет значащих цифр, изменяется только масштаб (наподобие перевода, скажем, метров в километры). Это позволяет ограничиться изучением интервала [1; 10).

Изучение неустойчивых чисел

Итак, существуют ли неустойчивые числа? Для начала проверим однозначные числа: $x_0 = 1, 2, \dots, 9$. Довольно быстро обнаруживается, что число 5 — неустойчивое. Действительно, $x_1 = 5 \cdot 5 = 25$; $x_2 = 2 \cdot 25 = 50$, т. е. $x_2 = 10x_0$. Очевидно, $x_4 = 10x_2 = 100x_0$, $x_6 = 1000x_0$ и т. д.

Немного поразмыслив, делаем вывод, что вообще все числа из интерва-

ла [5; 6) — неустойчивые. Действительно, у таких чисел первая цифра — 5, и поэтому $x_1 = 5x_0$, а значит, $25 \leq x_1 < 30$, т. е. первая цифра числа x_1 равна 2. Поэтому $x_2 = 2x_1 = 10x_0$. Дальнейшее ясно.

Из только что приведенных рассуждений можно сделать еще один вывод: все числа из интервала $[2\frac{1}{2}; 3)$ тоже неустойчивые (нужно разделить пределы неустойчивости [25; 30) числа x_1 на 10).

Итак, определены уже два интервала неустойчивости: [5; 6) и $[2\frac{1}{2}; 3)$.

Ну а теперь нам предстоит довольно нудная работа: проверка остальных чисел из интервала [1; 10).

$1 \leq x_0 < 2$. Эти числа сами по себе начинаются с единицы и потому устойчивые.

$2 \leq x_0 < 3$. Половина этого интервала уже исследована (числа $2\frac{1}{2} \leq x_0 < 3$ — неустойчивые). Пусть $2 \leq x_0 < 2\frac{1}{2}$. Тогда $x_1 = 2x_0$ и $4 \leq x_1 < 5$;

поэтому $x_2 = 4x_1$, и $16 \leq x_2 < 20$. Первая цифра числа x_2 — единица, значит, числа $x_0 \in [2; 2\frac{1}{2})$ — устойчивые. Отсюда же делаем вывод, что числа $x_0 \in [4; 5)$ — тоже устойчивые (ибо такими получились значения для x_1).

$3 \leq x_0 < 4$. Тогда $x_1 = 3x_0$ и $9 \leq x_1 < 12$. Если $x_1 \geq 10$, то x_1 начинается с 1 и x_0 — устойчивое. Это достигается, если $x_0 \geq 3\frac{1}{3}$. Итак, все $x_0 \in [3\frac{1}{3}; 4)$ — устойчивые.

Пусть $x_0 \in [3; 3\frac{1}{3})$. Тогда $x_1 = 3x_0$ и $9 \leq x_1 < 10$. Следовательно, $x_2 = 27x_0$ и $81 \leq x_2 < 90$. Значит, $x_3 = 8x_2 = 216x_0$ и $648 \leq x_3 < 720$. В зависимости от значения x_0 число x_3 может начинаться с 6 или 7, причем «граничное» значение x_0 определяется из условия $x_3 = 216x_0 = 700$, т. е. $x_0 = 3\frac{13}{54}$. Итак, необходимо рассмотреть 2 случая:

1) $x_0 \in [3; 3\frac{13}{54})$. Тогда $x_3 = 216x_0$ и $648 \leq x_3 < 700$. Следовательно, $x_4 =$

$=6x_3=1296x_0$ и $3888 \leq x_4 < 4200$. Это позволяет сделать вывод об устойчивости, так как уже известно, что числа из интервалов $[3\frac{1}{3}; 4)$ и $[4; 5)$ — устойчивы, а пределы значений x_4 , деленные на 1000, целиком лежат в интервале $[3\frac{1}{3}; 5)$.

2) $x_0 \in [3\frac{13}{54}; 3\frac{1}{3})$. Тогда $x_3=216x_0$ и $700 \leq x_3 < 720$. Следовательно, $x_4=7x_3=1512x_0$ и $4900 \leq x_4 < 5040$. Деля на 1000 и учитывая ранее найденные интервалы неустойчивости, получаем: те x_0 , для которых $4900 \leq x_4 < 5000$, — устойчивы, а те x_0 , для которых $5000 \leq x_4 < 5040$, — неустойчивы. «Граничное» значение x_0 найдется из условия $x_4=1512x_0=5000$, откуда $x_0=3\frac{58}{189}$.

Итак, после долгих мук получен третий интервал неустойчивости: $[3\frac{58}{189}; 3\frac{1}{3})$.

Пойдем дальше, учитывая, что интервалы $[4; 5)$ и $[5; 6)$ уже рассмотрены.

$6 \leq x_0 < 7$. Тогда $x_1=6x_0$ и $36 \leq x_1 < 42$. Но мы уже определили, что интервал $[3,6; 4,2)$ — устойчив, и поэтому интервал $[6; 7)$ — тоже устойчив.

$7 \leq x_0 < 8$. Тогда $x_1=7x_0$ и $49 \leq x_1 < 56$. Здесь «граничным» является такое значение x_0 , что $x_1=7x_0=50$, т. е. $x=7\frac{1}{7}$. Итак, появился четвертый интервал неустойчивости:

$[7\frac{1}{7}; 8)$.

$8 \leq x_0 < 9$. Тогда $x_1=8x_0$ и $64 \leq x_1 < 72$. Здесь «граничное» значение x_0 определяется из условия $x_1=8x_0=7\frac{1}{7} \cdot 10$, т. е. $x_0=8\frac{13}{14}$. Возникает пятый интервал неустойчивости:

$[8\frac{13}{14}; 9)$; а интервал $[8; 8\frac{13}{14})$ — устойчивый.

$9 \leq x_0 < 10$. Тогда $x_1=9x_0$ и $81 \leq x_1 < 90$. Деля на 10, находим «граничное» значение: $x_1=9x_0=8\frac{13}{14} \cdot 10$,

т. е. $x_0=9\frac{58}{63}$. Последний интервал неустойчивости: $[9\frac{58}{63}; 10)$, а интервал $[9; 9\frac{58}{63})$ — устойчивый.

Таким образом, всего имеется 6 интервалов, содержащих неустойчивые числа (эти интервалы изображены на заставке к статье). Суммарная их «длина» равна примерно 2,53, т. е. около 28% «длины» всего интервала $[1; 10)$. Как видно, вероятность того, что наугад взятое число окажется неустойчивым, не так уж мала, хотя, на первый взгляд, казалось, что она должна быть намного меньше.

Теперь «судьба» каждого исходного числа нам ясна, и мы можем сразу сказать, что последовательность, начинающаяся, к примеру, числом $x_0=71428571$, на некотором шаге «застынет»; если же x_0 увеличить на 1 (т. е. взять $x_0=71428572$), то последовательность будет расти неограниченно. Подобные выводы можно делать и для иррациональных чисел. Например, число $\pi=3,141\dots$ — устойчивое, а $e=2,718\dots$ — неустойчивое.

Интересно было бы поискать неустойчивые числа и в других системах счисления. Только не в двоичной — ведь там неустойчивых чисел вовсе нет (все ненулевые двоичные числа имеют первой значащей цифрой единицу)! Насчет остальных систем счисления автору ничего не известно.

А зачем все это?

И действительно — зачем? Чему автор хотел научить, какие проблемы поднял?

Могу ответить лишь в духе Ноздрева: очень уж интересные подробности открылись! Да и так ли уж обязательно непременно чему-то учить? Нужна ведь и просто «гимнастика ума», а если она может немного развлечь — тем лучше!

Задачи

M1146—M1150, Ф1153—Ф1157

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1146» или «Ф1153». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

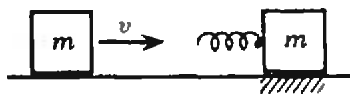


Рис. 1.

M1146. Точка K — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC . На сторонах AC и BC взяты точки M и N так, что $\angle MKN = 60^\circ$. Докажите, что периметр треугольника MCN равен половине периметра треугольника ABC .

Э. Г. Готман

M1147. Задано несколько точек, соединенных отрезками двух цветов: некоторые пары точек — голубыми отрезками, некоторые другие — красными. Известно, что в любом замкнутом пути, состоящем из нескольких отрезков, число красных отрезков четно. Докажите, что все точки можно разбить на два множества так, что каждый красный отрезок соединяет точки из разных множеств, а каждый голубой — точки из одного и того же множества.

M1148. Докажите, что для нецелого $a > 1$ (причем $a \neq \sqrt[p]{q}$, где p и q — натуральные числа) и натурального n выполняется равенство

$$[\log_a 2] + [\log_a 3] + \dots + [\log_a n] + [a] + [a^2] + \dots + [a^k] = nk,$$

где $k = [\log_a n]$ ($[x]$ — целая часть числа x).

Р. Б. Алексеев, Л. Д. Курляндчик

M1149. На плоскости заданы два луча p, q с вершинами в точках P и Q соответственно. Две окружности — одна с центром на луче p , проходящая через точку P , и другая с центром на луче q , проходящая через Q , — касаются друг друга в точке M внешним образом. Найдите множество точек M .

В. В. Шабукин

M1150. Докажите, что при любых положительных $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ выполнено неравенство

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}.$$

Е. Г. Моисеев,
ученик 10 класса

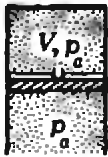
Ф1153. Жидкий раствор бетона налили в кузов самосвала доверху. Оценить, какая доля раствора останется в кузове после резкого торможения. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно разумные их числовые значения и получить числовой результат.

Г. В. Меледин

Ф1154. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Один из кубиков приклеен к столу (рис. 1). Кубик отрывается от стола, если к нему приложить горизонтальную силу F . Между кубиками имеется невесомая свободная пружина жесткостью k . Незакрепленную свободку сообщили скорость v . С какими скоростями разлетятся кубики после столкновения?

Г. В. Федотович

Задачник „Квант“



г

Рис. 2.

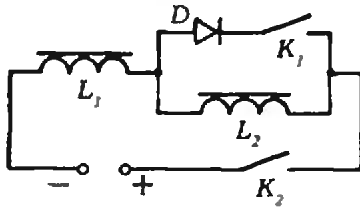


Рис. 3.

Ф1155. Тяжелый поршень массой M может свободно перемещаться внутри вертикального теплоизолированного цилиндра сечением S , верхний конец которого закрыт, а нижний открыт в атмосферу (рис. 2). Внутри цилиндра имеется горизонтальная перегородка с маленьким отверстием, отсекающая от атмосферы один моль воздуха, занимающий объем V и имеющий атмосферное давление p_a . Поршень, который вначале прижат снизу к перегородке, отпускают. Принимая, что внутренняя энергия газа равна sT , найти, на сколько опустится поршень.

Г. Л. Коткин

Ф1156. Два одинаковых электромагнита L_1 и L_2 включены последовательно в цепь постоянного тока (рис. 3). С помощью ключа K_1 параллельно одному из них может в непроводящем направлении подключаться диод D . При замкнутом ключе K_2 к электромагнитам притянута железная пластинка. Если ключ K_1 разомкнут, то при размыкании K_2 пластинка отрывается от обоих магнитов одновременно и падает, сохраняя горизонтальное положение. Если ключ K_1 замкнут, то при размыкании K_2 пластинка вначале отрывается от магнита L_1 , а потом от L_2 , что приводит к ее вращению. Объяснить различие в поведении пластинки в первом и втором случаях.

В. Б. Голубев

Ф1157. Имеются два полупрозрачных зеркала, каждое из которых, как показывают измерения, пропускает приблизительно $1/5$ часть светового потока, а остальной свет отражает. Если на пути параллельного пучка света установить оба зеркала так, чтобы их плоскости были перпендикулярны пучку, то, казалось бы, они должны пропускать $1/25$ часть падающего потока света, тогда как на самом деле свет ослабляется не в 25 раз, а заметно меньше (примерно в 10 раз). Объяснить явление.

В. Б. Голубев

Решения задач

М1121—М1124, Ф1133—Ф1136

М1121. Дан треугольник ABC . Две прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K . Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .

1. Одно из самых бесхитростных решений основано на том, чтобы опустить из точки B перпендикуляры BH , BA_1 , BC_1 на прямые AC , AK , CK (они равны по соображениям симметрии) и рассмотреть получающиеся углы с вершиной B . Треугольники KA_1B и KC_1B равны, причем $\angle A_1BK = \angle KC_1B$ (их сумма составляет $2\angle B$, поскольку $\angle A_1BA = \angle ABH$, $\angle HBC = \angle BC_1C$). С другой стороны, радиус OB описанной окружности в любом треугольнике ABC составляет такие же углы со сторонами AB и BC , как высота BH со сторонами BC и AC соответственно:

$$\begin{aligned} \angle ABO &= |90^\circ - \angle AOB/2| = |90^\circ - \angle C| = \angle HBC, \\ \angle CBO &= |90^\circ - \angle COB/2| = |90^\circ - \angle A| = \angle HBA. \end{aligned}$$

Поэтому $\angle A_1BO = \angle OC_1B = \angle B$, т. е. OB и KB лежат на одной и той же прямой — биссектрисе угла A_1BC_1 .

Задачник „Квант“

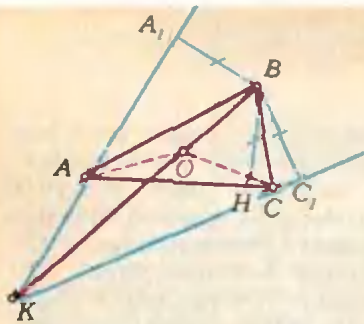


Рис. 1.

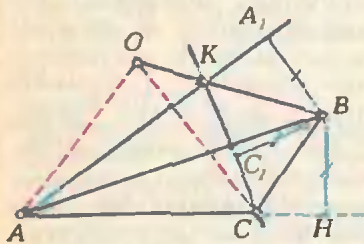


Рис. 2.

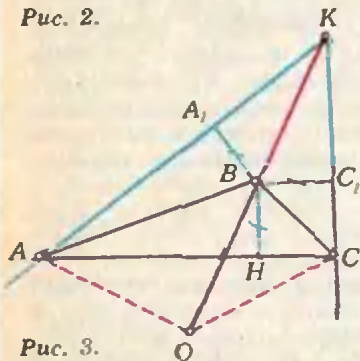


Рис. 3.

Трудность в оформлении решения этой задачи заключается в том, что нужно учесть различные возможные случаи: 1) $\triangle ABC$ остроугольный; 2) один из углов A или C не меньше 90° ; 3) $\angle B > 90^\circ$ (см. рисунки 1—3; заметим, что случай $\angle B = 90^\circ$ невозможен: при этом построенные прямые параллельны). Впрочем, рассуждения во всех случаях аналогичны.

Наметим еще два решения.

II. Угол между прямыми AK и KC дополняет $2\angle B$ до 180° , точнее

$$\begin{aligned} \angle A_1KC_1 &= 180^\circ - \angle A_1BC_1 = |180^\circ - 2\angle B| = \\ &= 180^\circ - \angle AOC, \end{aligned}$$

поэтому центр O лежит на окружности, проходящей через K , A и C , и (поскольку $AO = OC$) делит пополам дугу AC . Поэтому KO , также как и KB , — биссектриса угла A_1KC_1 .

Это решение также нуждается во внимательном разборе случаев 1—3. Как обычно, свободно от этой трудности решение с геометрическими преобразованиями.

III. Композиция симметрий относительно прямых AB и BC , т. е. поворот на угол $2\angle B$ с центром B , переводит прямую AK в прямую KC . Поворот на тот же угол $2\angle B$ с центром O переводит радиус OA в радиус OC , поэтому прямую AK он должен переводить в прямую, проходящую через C и имеющую то же направление, что и KC , т. е. в прямую KC . Отсюда следует, что точка O , также как и B , одинаково удалена от прямых AK и AC , и обе они лежат на биссектрисе угла между AK и KC .

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

М1122. Решите систему:

$$\begin{aligned} (x_3 + x_4 + x_5)^5 &= 3x_1, \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 &= 3x_2, \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 &= 3x_3, \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 &= 3x_4, \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 &= 3x_5. \end{aligned}$$

Ответ: система имеет три решения: $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_1$, где $x_1 = 0$, $x_1 = 1/3$ или $x_1 = -1/3$.

Вместе с каждым набором чисел $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, удовлетворяющим этой системе уравнений, ей удовлетворяют также наборы, полученные циклической перестановкой: $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$, $(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2)$ и т. д. Поэтому можно предполагать, что $x_i \geq x_1$ ($i = 2, 3, 4, 5$).

Воспользуемся тем, что функция $f(x) = x^5/3$ возрастающая. При нашем предположении

$$3x_2 = (x_4 + x_5 + x_1)^5 \geq (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1, \quad (1)$$

откуда $x_2 \geq x_1$, т. е. $x_2 = x_1$. Затем аналогично из неравенства

$$3x_3 = (x_5 + x_1 + x_2)^5 \geq (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2 \quad (2)$$

выводится, что $x_3 = x_2 = x_1$; из неравенства

$$3x_4 = (x_1 + x_2 + x_3)^5 \geq (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3 \quad (3)$$

следует, что $x_4 = x_3$ и, наконец, из равенства

$$3x_5 = (x_2 + x_3 + x_4)^5 = (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4 \quad (4)$$

получаем $x_5 = x_4$.

(Заметим, что можно рассуждать и короче: уже из неравенства (1) — зная, что оно обращается в равенство, — мы могли бы заключить, что $x_3 = x_1$, а затем из (3), — что $x_5 = x_1$.)

Задачник „Квант“

Итак, все x_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) равны одному и тому же числу x_1 ; для него получаем уравнение $(3x_1)^5 = 3x_1$, откуда $x_1 = 0$ или $x_1^4 = 1/3^4$, т. е. $x_1 = \pm 1/3$.

Л. Тугеску

M1123. Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла («вертикальные» и «горизонтальные» ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?

Ответ на этот вопрос положителен. Одно из возможных расположений конструируется индукцией по степеням 2 (рис. 1). Пусть в квадрате A_n размером $2^n \times 2^n$ (на пересечении первых 2^n строк и 2^n столбцов) расположены числа от 1 до 2^n так, что каждое из них встречается по разу в каждой строке и каждом столбце. На рисунке 2 показано, как из A_n изготавливается квадрат A_{n+1} размером $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, в котором расположены числа от 1 до 2^{n+1} и выполняется то же условие; запись $A_n + 2^n$ здесь означает, что ко всем числам квадрата A_n прибавляется 2^n .

8	7	6	5	4	3	2	1
7	8	5	6	3	4	1	2
6	5	8	7	2	1	4	3
5	6	7	8	1	2	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5
3	4	1	2	7	8	5	6
2	1	4	3	6	5	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8

Рис. 1.

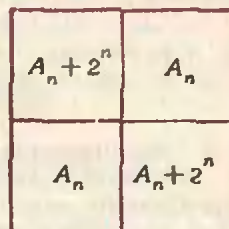


Рис. 2.

Эта задача связана с таким интересным вопросом. Пусть клетки бесконечной шахматной доски, занимающей прямой угол, занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$ следующим образом: на первой угловой клетке ставится 0, а затем каждой клетке приписывается наименьший номер, не использованный еще для нумерации каких-либо предшествующих клеток, стоящих левее нее на той же горизонтали или ниже нее — на той же вертикали. Какой номер получит клетка, стоящая на пересечении i -й горизонтали и j -й вертикали? (Номера приписываются клеткам в порядке возрастания суммы $i+j$; см. задачу 127 в книге А. М. и И. М. Ягломов «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», М.: 1954, Гостехтеориздат.)

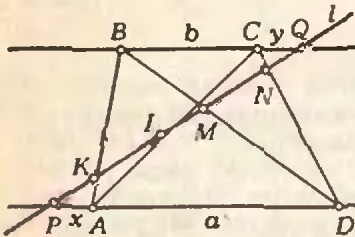
Н. Б. Васильев, В. С. Шевелев

M1124. Боковые стороны, диагонали и продолжения оснований трапеции пересекают прямую l в шести точках, т. е. высекают на прямой l пять отрезков. а) Докажите, что если крайние (1-й и 5-й) отрезки равны, то соседние с ними

Пусть прямая l пересекает боковые стороны AB и CD трапеции в точках K и N , диагонали AC и BD — в точках L и M , продолжения оснований $AD = a$ и $BC = b$ — в точках P и Q ; $PA = x$, $CQ = y$ (см. рисунок). Тогда, рассматривая пары подобных треугольников, основания которых лежат на прямых AD и BC , а общей вершиной служит одна из точек K, L, M или N , получим:

$$\frac{PK}{KQ} = \frac{x}{b+y}, \quad \frac{PN}{NQ} = \frac{x+a}{y}, \quad \frac{PL}{LQ} = \frac{x}{y}, \quad \frac{PM}{MQ} = \frac{x+a}{y+b}. \quad (*)$$

(2-й и 4-й) также равны.
 б) При каком отношении оснований трапеции можно провести прямую l так, чтобы все пять отрезков были равны?



Задачник „Квант“

а) Если произведение первых двух отношений (*) равно 1, то

$$\frac{PL}{LQ} \cdot \frac{PM}{MQ} = \frac{x(x+a)}{y(y+b)} = 1, \quad \frac{PL}{LQ} = \frac{MQ}{PM},$$

откуда

$$\frac{PL}{PQ} = \frac{MQ}{PQ}, \quad PL = MQ, \quad KL = MN.$$

б) Четыре отношения (*) равны соответственно $1/4$, 4 , $2/3$ и $3/2$ тогда (и только тогда), когда

$$4x = b + y, \quad 4y = a + x, \quad 2y = 3x, \quad 2(x+a) = 3(y+b).$$

Если $x = 2d$ и выполнены первые три из этих равенств, то $y = 3d$, $a = 10d$, $b = 5d$. При этом выполнено и четвертое равенство.

Таким образом, нужная прямая существует в том и только в том случае, когда одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Э. Г. Гогман

Ф1133. В калориметре медленно остывает расплав исследуемого вещества. Удельная теплота плавления этого вещества (она была определена в предыдущих опытах) $L = 200$ кДж/кг. По графику зависимости температуры вещества от времени (рис. 1) определите удельные теплоемкости вещества в твердом и жидком состоянии. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

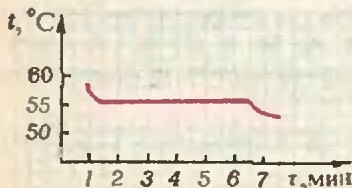


Рис. 1.

Как видно из рисунка, сначала вещество, находясь в жидком состоянии, охлаждается до температуры плавления, затем в течение 5 минут кристаллизуется без изменения температуры, после чего опять охлаждается, уже в твердом состоянии.

Очевидно, что если температура с течением времени не изменяется (во время кристаллизации), то выделяемая веществом тепловая мощность постоянна. Выразить ее можно, воспользовавшись горизонтальным участком графика:

$$P = \frac{Q}{\tau_{кр}} = \frac{mL}{\tau_{кр}}.$$

Продолжив участок графика, соответствующий жид-

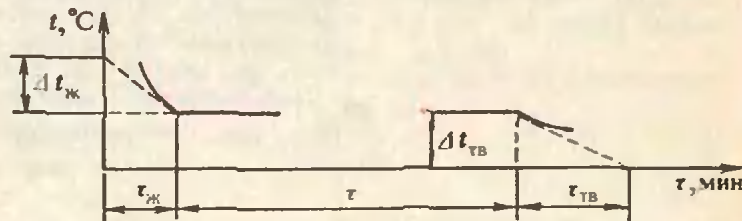


Рис. 2.

кому состоянию (проведя касательную к графику), можно записать (рис. 2):

$$c_{ж} m \Delta t_{ж} = P \tau_{ж},$$

откуда

$$c_{ж} = \frac{\tau_{ж}}{\Delta t_{ж}} \frac{L}{\tau_{кр}} \approx 8 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Аналогично для твердого состояния найдем:

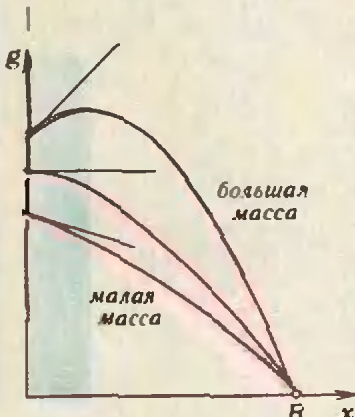
Задачник „Квант“

$$c_{\text{та}} = \frac{\tau_{\text{та}}}{\Delta t_{\text{та}}} \frac{L}{\tau_{\text{кр}}} \approx 15 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Заметим, что касательные мы провели для большей точности, можно было обойтись и без них, используя малые участки кривых, которые примыкают к горизонтальному участку графика.

А. Р. Зальберман

Ф1134. Исследуя вновь открытую планету, имеющую форму шара радиусом $R=6400$ км и покрытую по всей поверхности океаном глубиной $H=10$ км из обычной воды, ученые установили, что ускорение свободного падения остается с большой степенью точности неизменным при погружении в океан на различные глубины. Определите по этим данным ускорение свободного падения на планете. Гравитационная постоянная $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.



Внутри однородной сферы гравитационная сила равна нулю, внешние же тела сфера притягивает так, будто вся ее масса сосредоточена в центре. Рассчитаем ускорение свободного падения на глубине x в океане, покрывающем планету.

Рассмотрим сферический слой толщиной x , состоящий из воды. Его можно считать составленным из тонких однородных сферических оболочек, каждая из которых внутри себя гравитационной силы не создает. Поэтому гравитационное притяжение сводится к притяжению на поверхности шара радиусом $R-x$. Масса этого шара

$$m = M - \frac{4\pi\rho}{3} (R^3 - (R-x)^3),$$

где M — масса всей планеты, $\rho=10^3 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды. Тогда ускорение свободного падения

$$g = \frac{Gm}{(R-x)^2} = G \frac{M - 4\pi\rho(R^3 - (R-x)^3)/3}{(R-x)^2}.$$

Отметим, что это выражение справедливо лишь для малых, по сравнению с R , x — ведь не вся планета состоит из воды. Поэтому на графиках, изображающих зависимость g от x (см. рисунок), только начальные участки в окрашенной полосе описываются полученной формулой. Проанализируем полученное выражение. При достаточно большой массе планеты M ускорение g при погружении возрастает. При достаточно малых массах ускорение сразу же начинает падать. Существует граничная масса, выше которой ускорение растет, а ниже — падает. Значение этой граничной массы и соответствует случаю, когда вблизи поверхности океана g меняется меньше всего, т. е. остается почти постоянным.

Теперь проведем расчеты. Ускорение $g_0=GM/R^2$ на поверхности океана в случае граничной массы «почти» равно ускорению g на малых глубинах x , а их отношение «почти» равно единице:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{1 - 4\pi\rho R^3(1 - (1-x/R)^3)/(3M)}{(1-x/R)^2} \approx 1.$$

Смысл этого «почти» в том, что нужно учесть первую степень малой величины x/R и пренебречь второй и третьей степенями. Тогда предыдущее выражение сведется к равенству

(Продолжение см. на с. 42)

Задача «Кванта»

$$\frac{1 - 4\pi\rho R^2 x/M}{1 - 2x/R} = 1,$$

или

$$1 - \frac{4\pi\rho R^2}{M} x = 1 - \frac{2x}{R}.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при x , имеем

$$M = 2\pi R^3 \rho = 1,6 \cdot 10^{24} \text{ кг},$$

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = 2,6 \text{ м/с}^2.$$

В заключение подумайте сами, будет расти или уменьшаться ускорение свободного падения при погружении в океан на Земле.

И. И. Воробьев

Ф1135. Горизонтальная площадка с лежащей на ней монетой совершает круговое поступательное движение в горизонтальной плоскости так, что все ее точки описывают окружности радиусом R с угловой скоростью ω . Коэффициент трения между монетой и площадкой μ . Каким будет установившееся движение монеты? Какой след «вычерчивает» она на площадке?

Общий характер установившегося движения монеты легче всего уяснить из соображений симметрии. При круговом поступательном движении горизонтальной площадки все ее точки и все направления в горизонтальной плоскости физически эквивалентны. Поэтому, какими бы ни были начальные условия при установившемся режиме в неподвижной (лабораторной) инерциальной системе отсчета, монета будет двигаться по окружности поступательно (без вращения) и с той же угловой скоростью ω , что и площадка. От начальных условий зависит только положение центра этой окружности. Любая другая мыслимая траектория таким свойством — отсутствием выделенных направлений — не обладает.

Соображения симметрии позволяют сделать еще один вывод: относительно площадки (т. е. движущейся неинерциальной системы отсчета) монета, если она проскальзывает, тоже движется по окружности.

Теперь, когда мы представляем себе характер движения монеты, остается только найти радиусы окружностей, вычерчиваемых монетой в той и другой системах отсчета.

В горизонтальной плоскости на монету действует единственная сила — сила трения со стороны площадки. Рассмотрим сначала случай, когда монета движется вместе с площадкой, т. е. не проскальзывает. При этом в инерциальной системе отсчета монета движется по окружности радиусом R с ускорением $\omega^2 R$, направленным к центру этой окружности. Так как это ускорение сообщается монете силой трения покоя, модуль которой не может превышать значения μmg , то движение вместе с площадкой (без проскальзывания) будет происходить при условии $\omega^2 R \leq \mu g$, т. е. при $\omega^2 R / (\mu g) \leq 1$.

При значениях безразмерного параметра $\omega^2 R / (\mu g)$, превосходящих единицу (т. е. при достаточно большой угловой скорости ω , или большом радиусе R , или малом

Задача "Кванта"

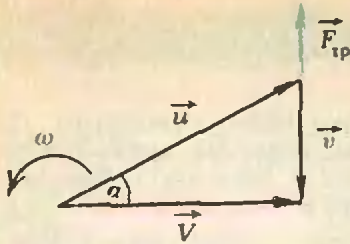


Рис. 1.

коэффициенте трения μ), монета будет проскальзывать относительно площадки. В этом случае центростремительное ускорение монете сообщает сила трения скольжения, направленная в каждый момент времени в сторону, противоположную скорости \vec{v} монеты относительно площадки. Вместе с тем при равномерном движении по окружности сила перпендикулярна скорости \vec{V} монеты в неподвижной инерциальной системе отсчета. Поэтому векторы \vec{v} и \vec{V} взаимно перпендикулярны. Скорость \vec{V} монеты в неподвижной системе отсчета равна векторной сумме скорости \vec{v} монеты относительно площадки и скорости \vec{u} той точки площадки, в которой в данный момент находится монета (хотя, разумеется, скорости всех точек площадки одинаковы при ее поступательном движении):

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}. \quad (1)$$

Соотношение (1) графически проиллюстрировано на рисунке 1, откуда видно, что при проскальзывании монеты ее скорость V в неподвижной системе отсчета всегда меньше скорости площадки $u = \omega R$. По условию вектор \vec{u} поворачивается с угловой скоростью ω , поэтому и весь треугольник скоростей на рисунке 1 вращается как целое, так что взаимное расположение всех векторов остается неизменным. Угол α характеризует отставание по фазе вектора \vec{V} скорости монеты от вектора \vec{u} скорости площадки.

Для определения радиуса r круговой траектории монеты в неподвижной системе отсчета воспользуемся вторым законом Ньютона, т. е. приравняем силу трения скольжения μmg произведению массы m монеты на ускорение $\omega^2 r$:

$$\mu mg = m\omega^2 r,$$

откуда

$$r = \mu g / \omega^2 \text{ при } \omega^2 R / (\mu g) \geq 1. \quad (2)$$

Интересно отметить, что при проскальзывании монеты радиус r ее траектории, как видно из соотношения (2), не зависит от радиуса R окружностей, по которым движутся точки площадки. Однако $r \leq R$, причем равенство будет только в предельном случае $\omega^2 R / (\mu g) \rightarrow 1$, когда проскальзывание прекращается.

Чтобы найти радиус ρ окружности, которую монета вычерчивает на площадке, заметим, что все фигурирующие в формуле (1) скорости пропорциональны радиусам соответствующих окружностей:

$$V = \omega r, \quad v = \omega \rho, \quad u = \omega R. \quad (3)$$

Поскольку треугольник скоростей на рисунке 1 прямоугольный, с помощью теоремы Пифагора и соотношений (3) получаем

$$R^2 = \rho^2 + r^2, \quad \rho = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Подставляя сюда найденное значение r из выражения (2), находим

$$\rho = R \sqrt{1 - (\mu g / (\omega^2 R))^2} \text{ при } \omega^2 R / (\mu g) \geq 1.$$

На рисунке 2 показаны траектория монеты в непо-

Задачник „Квант“

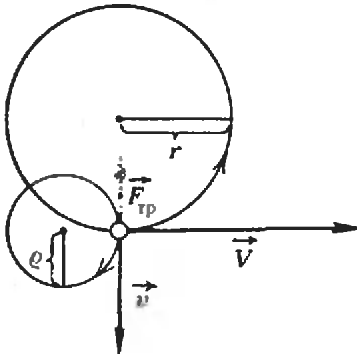


Рис. 2.

движной системе отсчета (окружность радиусом r) и след, который монета вычерчивает на движущейся площадке (окружность радиусом ρ). Если в неподвижной системе отсчета монета движется против часовой стрелки (как и площадка), то относительно площадки ее движение происходит по часовой стрелке. При «быстром» движении площадки, когда $\omega^2 R / (\mu g) \gg 1$, монета в неподвижной системе отсчета практически стоит на месте ($r \ll R$), а площадка под ней описывает круги радиусом R , так что $\rho \approx R$. При «медленном» движении площадки, когда $\omega^2 R / (\mu g) \approx 1$, монета почти не отстает от площадки, описывая в неподвижной системе отсчета круги почти такого же радиуса: $r \approx R$, так что $\rho \rightarrow 0$.

Е. И. Бутиков

Ф1136. В схеме, приведенной на рисунке 1, амперметры показывают токи 0,2 А и 0,3 А. После того как два резистора в схеме поменяли местами, показания амперметров не изменились. Какой ток течет через батарею? Считать напряжение батареи неизменным. Сопротивления амперметров пренебрежимо малы.

В исходной схеме напряжение на каждом резисторе одно и то же. Раз после перестановки резисторов показания амперметров не изменились, значит, сопротивления переставленных резисторов одинаковы.

Рассмотрим два возможных варианта перестановки среднего резистора и одного из крайних (рис. 2):

$$R_1 = R_2 \text{ и } R_2 = R_3.$$

Вариант $R_1 = R_3$, т. е. перестановка крайних резисторов, невозможен, так как иначе амперметры изначально должны были бы показывать одинаковые токи.

Итак (см. рис. 2):

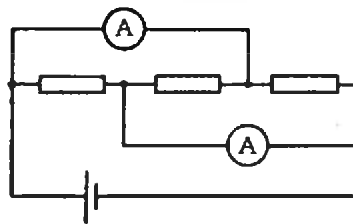


Рис. 1.

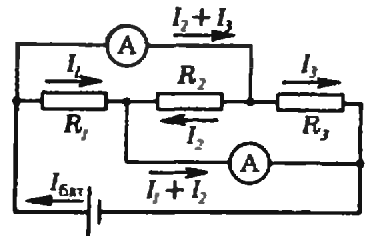


Рис. 2.

$$1) R_1 = R_2 \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{I_2 + I_3}{2} = 0,1 \text{ А,}$$

$$I_{\text{бат } 1} = I_1 + (I_2 + I_3) = 0,1 \text{ А} + 0,3 \text{ А} = 0,4 \text{ А.}$$

$$2) R_2 = R_3 \Rightarrow I_2 = I_3 = \frac{I_2 + I_3}{2} = 0,15 \text{ А,}$$

$$I_{\text{бат } 2} = I_3 + (I_1 + I_2) = 0,15 \text{ А} + 0,2 \text{ А} = 0,35 \text{ А.}$$

А. Р. Зильберман

Р-значим ракетка

«Союз» открывает Турнир

Каждый исследователь Вселенной проходит свой путь к звездам. Всесоюзное аэрокосмическое общество «Союз» предлагает начать этот путь с участия в Турнире юных исследователей космоса. Подобные турниры (но по физике) проводятся Московским университетом уже более десяти лет. И всегда они проходят необычно и увлекательно. Итак, Турнир начинается...

Задания заочного коллективного конкурса
Условия задач сформулированы максимально кратко. Вам самим следует сделать необходимые допущения и обоснованные упрощения, выбрать модель для описания данного явления и алгоритм решения задачи, исследовать полученные результаты.

1. Часы. Вы посетили некую планету и собираетесь вернуться на нее через десять тысяч или даже миллион лет. Какие часы вы оставите на этой планете, чтобы точно измерить время вашего отсутствия на планете?

2. Коррекция орбиты. Спутник массой 50 тонн движется по круговой орбите на высоте 200 км над поверхностью Земли. Как изменятся параметры его орбиты, если двигатели спутника сообщат ему дополнительный импульс 10^4 кг · м/с

а) вдоль траектории полета?

б) перпендикулярно траектории в плоскости орбиты?

в) перпендикулярно плоскости орбиты?

3. Затраты на коррекцию. Какую минимальную работу должны совершить двигатели спутника для того, чтобы повернуть плоскость траектории на угол α ?

4. Связанные спутники. Необходимо, чтобы два спутника массами 10 и 50 тонн были расположены на одной прямой с центром Земли. Предложите наиболее экономичный способ поддержания такой ориентации спутников, если расстояние между спутниками

а) 100 метров,

б) 10 километров.

5. Рыбалка со спутника. Можно ли со стационарного спутника спустить на тросике зонд на поверхность Земли или хотя бы до плотных слоев атмосферы?

6. Метеоритная защита. Разработайте систему защиты космического корабля от микрометеоритов и метеоритов средних размеров. Если ваша система не сработала, то сколько времени имеется у космонавта для обнаружения и заделки отверстия диаметром 1 мм, пробитого метеоритом в обшивке корабля?

7. Черная дыра. Как заметить, что ваш космический корабль приближается к черной дыре, и как избежать такой неприятной встречи?

8. Комета. Представьте себе, что ледяная комета массой 10^{15} кг может через несколько лет врезаться в Землю. Разработайте проект предотвращения катастрофы.

9. Астронавт. На какую максимальную дальность путешествия может рассчитывать астронавт

а) при современном уровне развития техники?

б) в далеком будущем, когда практически все технические трудности будут преодолены?

10. Космический экипаж. Пусть в составе экспедиции на Марс восемь человек. Как бы вы распределили обязанности в таком коллективе? Как избежать конфликтных ситуаций в течение перелета Земля — Марс — Земля?

11. Видеосюжет. Предложите сценарий для 5—10 минутного научного или учебного видеофильма, который будет снят в космической лаборатории.

12. Великое противостояние. Вооружившись телескопом и другими физическими приборами, вы можете наладить систематические наблюдения Марса. Поделитесь с нами вашими наблюдениями.

13. Гравитационное ускорение. Обоснуйте способ использования гравитационного поля планет для разгона космического корабля. В каком году и какого числа вы предложили бы начать полет зонда к границам Солнечной системы, если для ускорения решено использовать Марс? Стартовая скорость зонда 15 км/с.

14. Атмосфера Луны. Представьте, что вам удалось создать на Луне атмосферу среднего состава. Опишите ее параметры и свойства. Как быстро она будет «худеть» и как сохранить такую атмосферу?

15. Футбол на Луне. Возможно, в будущем Луна станет излюбленным местом отдыха землян. К сожалению, любителей футбола ждет разочарование. Предложите подвижную игру для отдыхающих на Луне, не уступающую по увлекательности футболу.

(Окончание см. на с. 61)

„Клант“ для младших школьников

Задачи

1. Иногда продавцы, принимая мелочь, взвешивают ее. Однажды продавцу дали 50 рублей монетами по 15 и 20 копеек. Их общая масса оказалась равной 800 г. Сколько было монет? (Пятнадцатикопеечная монета (пятиалтынный) весит 2,5 г, а двадцатикопеечная (двугривенный) — 3 г.)

2. Расставьте числа от 1 до 8 в кружки фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма чисел на каждой окружности была одной и той же.

3. Мы с сыном катались в лодке по озеру. В воде отражался прибрежный лес. Сын сказал: «Давай наедем на отражение, я хочу, чтобы оно оказалось у меня под ногами». Мы попробовали сделать это, но отражение «убежало» от нас. Почему?

4. В газете «Советский спорт» (3.V.1987) была опубликована промежуточная таблица одного футбольного турнира:

	Игры	Побед	Ничьих	Пораж.	Разн. мяч.	Очки
Венгрия	2	2	0	0	4—1	4
Швеция	2	1	1	0	1—1	3
Испания	2	0	2	0	3—3	2
Ирландия	3	0	1	2	3—5	1
Франция	1	0	0	1	0—2	0

Докажите, что в таблице имеется ошибка, и, зная, что ошибка одна, исправьте ее и укажите результаты сыгранных матчей.

5. Точку пересечения средних линий выпуклого четырехугольника соединили с его вершинами (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих треугольников.

Эти задачи нам предложили А. В. Богомоляная, Н. И. Авилов, Г. А. Гальперин, А. Ф. Коган, В. В. Произволов.



АРИФМЕТИКА ПЕСОЧНЫХ ЧАСОВ

Кандидат физико-математических наук
С. В. ДВОРЯНИНОВ.

кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

За свою историю человек изобрел множество видов часов: солнечные, огненные, водяные, песочные, механические, электрические, электронные, атомные...

Солнечные часы теперь можно встретить на зданиях как украшение. Об огненных часах напоминают свечи на новогодних елках. Водяные и песочные часы заявляют о себе в восклицании: ваше время истекло! Правда, кое-где в процедурных кабинетах поликлиник еще сохранились песочные часы на 3, 5 и 10 минут. Но и там они не могут составить конкуренцию электрическим и электронным таймерам, которые вытесняют эти изобретения тысячелетней давности, как ЭВМ и микрокалькуляторы вытесняют конторские счеты и арифмометры.

Но все-таки давайте поразмышляем немного о песочных часах — стеклянном баллончике с перетянутой по осиному талией (рис. 1), через которую из одной половинки часов в другую пересыпается мелкий прокаленный песок.

Если это — трехминутные часы, то песок пересыпается за три минуты. Если их тут же перевернуть, то можно отмерить 6 минут. Еще раз перевернув их в момент полного пересыпания песка, можно дождаться окончания девятиминутного интервала. Понятно, что таким образом можно отмерить любое целое число минут, кратное трем.

Ну а если у нас есть пара песочных часов — трехминутные и пятиминутные, — то мы сможем еще отмерять время, кратное 5 минутам. Таким образом, мы можем отмерить 3, 5, 6, 10 минут... Кроме того, можно отмерить и 8 минут: сначала отсчи-

таем 5 минут на одних часах, а потом 3 минуты на других. А 11 минут? Тоже можно, потому что $11 = 2 \cdot 3 + 5$. И 12 минут отмерить можно, так как $12 = 4 \cdot 3$. Проверьте, что можно отмерить и 13, и 14, и 15 минут.

А может быть, мы сможем отмерять любое целое число минут, большее 7? Конечно же! Если мы умеем отмерять 8, 9 и 10 минут, то, добавляя по 3 минуты, получим 11, 12 и 13 минут, добавляя еще по 3 минуты, получим 14, 15 и 16 минут и т. д.

Заметим, что заодно мы показали, что всякую сумму в целое число рублей, большую семи рублей, можно уплатить купюрами достоинством в 3 и 5 рублей. На бумажных деньгах доказательство можно провести и иначе.

Пусть мы можем уплатить некоторое число рублей, большее семи; покажем, что в таком случае мы можем уплатить сумму и на 1 рубль большую. Отсюда — как говорят, по индукции — и будет следовать наше утверждение.

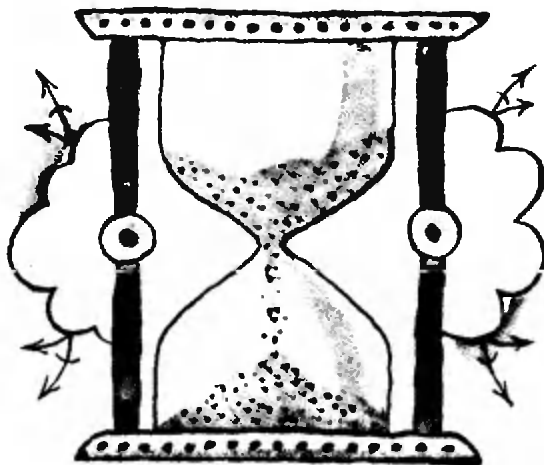


Рис. 1.

Действительно, если в имеющейся сумме есть купюра в 5 рублей, то, заменив ее двумя «трешками», мы увеличим сумму на 1 рубль. Если же в сумме нет ни одной «пятерки», то там не менее трех «трешек» (сумма больше семи). Заменив три «трешки» двумя «пятерками», мы и в этом случае увеличим сумму на 1 рубль. Доказательство окончено.

Но вернемся к песочным часам. Если у нас на руках только пятиминутные и десятиминутные часы, то, как нетрудно понять, с их помощью мы сможем отмерять только промежутки времени, кратные 5 минутам. И вообще, если у нас есть k -минутные и m -минутные песочные часы, то время, отмеренное с их помощью, будет кратно НОД (k, m) — наибольшему общему делителю чисел k и m . Числа 3 и 5 взаимно просты, их наибольший общий делитель равен 1; числа 3 и 10 тоже взаимно просты. Оказывается, что с помощью трехминутных и десятиминутных песочных часов можно отмерить любое целое число минут, большее семнадцати. Действительно, $18=6 \cdot 3$, $19=10+3 \cdot 3$, $20=2 \cdot 10$. А дальше, как и прежде, добавляем нужное число раз трехминутные интервалы.

Ну а в общем случае? Оказывается, что если числа k и m взаимно просты, то при помощи k -минутных и m -минутных часов можно отмерить любое целое количество минут, большее $km - k - m$. Заметим, кстати, что $3 \cdot 5 - 3 - 5 = 7$, а $3 \cdot 10 - 3 - 10 = 17$, т. е. трехминутными и пятиминутными часами можно отмерить любой целочисленный интервал времени, больший семи минут; а трехминутными и десятиминутными часами — любой целочисленный интервал времени, больший семнадцати минут, что мы и видели раньше.

Докажем, что ровно $km - k - m$ минут с помощью k -минутных и m -минутных часов при взаимно простых числах k и m отмерить нельзя. В самом деле, пусть мы смогли это сделать, «запуская» k -минутные часы x раз, а m -минутные — y раз. Тогда $km - k - m = xk + ym$, или $k(x+1) = m(k-1-y)$. Так как k и m

взаимно просты, число $k-1-y$ должно делиться на k (причем $k-1-y > 0$). Но $k-1-y < k$. Получили противоречие.

Таким образом, мы доказали, что, с помощью трехминутных и пятиминутных песочных часов невозможно отмерить промежуток времени в 7 минут. А теперь совершим невозможное — отмерим 7 минут с помощью этих часов! А как же наше доказательство? Доказательство верно, но лишь при том предположении, что очередной пуск часов происходит после полного пересыпания песка у работавших до этого часов. Это предположение естественно для одних часов, поскольку с их помощью мы не можем отмечать промежутки времени, меньшие того, на который эти часы рассчитаны. Но, имея двое часов, мы получаем новые возможности.

Запустим одновременно трехминутные и пятиминутные часы. В тот момент, когда на трехминутных часах упадет вниз последняя песчинка, остановим пятиминутные часы. Сделать это очень просто — стоит лишь положить их набор (рис. 2). Теперь пятиминутные часы «настроены» на 2 минуты, т. е. с их помощью мы можем отмерить две минуты, а значит, и 7 минут: $7=2+5$.

Итак, с помощью трехминутных и пятиминутных часов мы можем отмерять промежутки времени в 2, 3, 5, 6, 7, 8 и любое большее число минут. Остались неясными промежутки в 1 и 4 минуты. Может быть, их тоже можно отмерить? Конечно. «Запустим» наши часы одновременно. В тот момент, когда на трехминутных часах истечет песок, переворачиваем их и, тем самым, начинаем новую трехминутку, но прервем ее в тот момент, когда вторые часы отмерят свои 5 минут. Остановленные трехминутные часы окажутся «настроенными» на 1 минуту ($2 \cdot 3 - 5 = 1$). Получить теперь 4 минуты не представляет труда, поскольку $4=1+3$.

Попробуйте теперь самостоятельно с помощью трехминутных и десятиминутных часов получить все целые

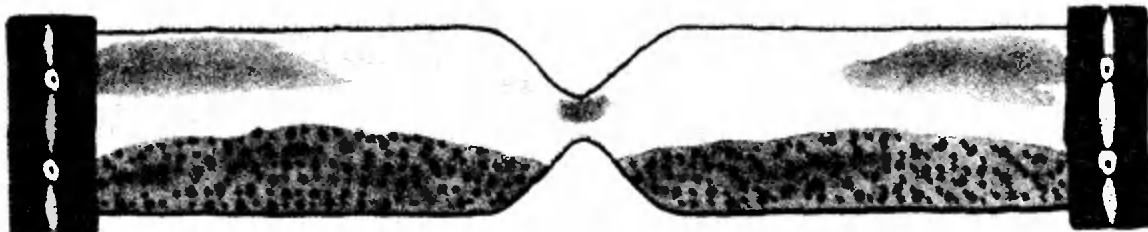


Рис. 2.

промежутки времени от 1 до 17 минут.

Почему мы уверены в том, что это можно сделать? Дело в том, что имеет место следующая теорема:

Если k и m — взаимно простые числа, то для любого целого числа n можно подобрать такие целые числа x и y , что $xk + ym = n$. Какое отношение к песочным часам имеет эта теорема? Самое прямое. Из нее следует, что при наличии k -минутных и m -минутных часов можно отмерить любое целое число минут, если числа k и m взаимно просты. Действительно, если мы хотим отмерить n минут, то найдем числа x и y , удовлетворяющие этому уравнению. Теперь в случае, когда оба эти числа положительны, сначала отмеряем xk минут с помощью k -минутных часов, а потом еще ym минут с помощью m -минутных. Если же одно из них, например y , отрицательно, то запускаем одновременно те и другие часы, переворачиваем своевременно те часы, из которых высыпался песок, и в тот момент, когда m -минутные часы отсчитывают свои $(-ym)$ минут ($y < 0!$), останавливаем k -минутные часы. Теперь, чтобы отсчитать n минут, следует запустить k -минутные часы и поддерживать их в работающем состоянии до тех пор, пока они не закончат отсчет xk минут.

Вниманию подписчиков!

В наступившем году количество страниц в нашем журнале увеличивается на 25 %, что позволяет нам открыть ряд новых рубрик.

Для компенсации расходов по увеличению объема журна-

ла цена каждого номера увеличивается на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год. Если вы уже оформили подписку, просим вас в соответствующем отделении «Союзпечати» про-

Таким образом, запущенные после остановки k -минутные часы отсчитают $xk - (-y)m = xk + ym = n$ минут.

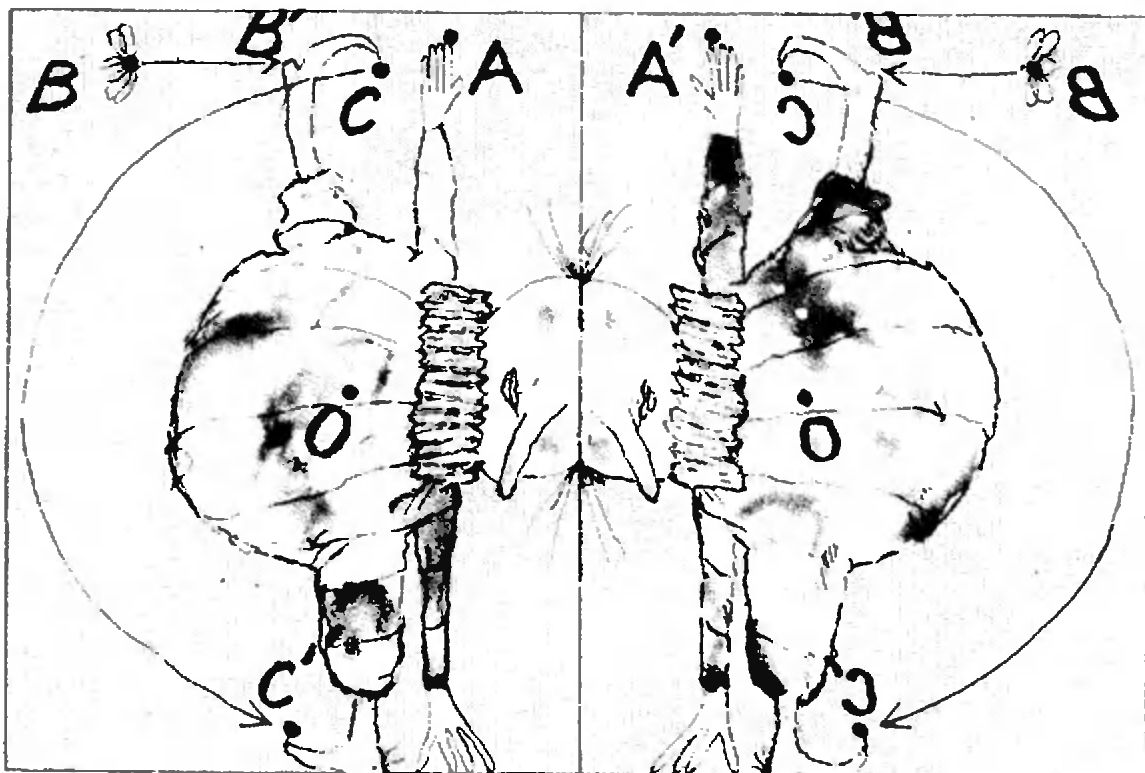
Но как найти решения уравнения $xk + ym = n$? Оказывается, достаточно научиться решать уравнение $xk + ym = 1$: если $x = a$, $y = b$ — решение этого уравнения, то $x = na$, $y = nb$ — решение уравнения $xk + ym = n$.

Да, но как найти какое-нибудь решение уравнения $xk + ym = 1$? Способов довольно много, опишем самый простой, но, наверное, не самый короткий.

Запишем это уравнение в виде $y = (1 - xk) : m$ и будем придавать числу x значения $0, 1, 2, \dots, m-1$. Покажем, что если числа k и m взаимно просты, то при одном из этих значений число $(1 - xk) : m$ будет целым. Найдем остатки от деления на m чисел $1 - 0 \cdot k, 1 - 1 \cdot k, \dots, 1 - (m-1) \cdot k$. Они попарно различны, ибо в противном случае число $(1 - x_1k) - (1 - x_2k) = (x_2 - x_1)k$ делилось бы на m , а значит, и $x_2 - x_1$ делилось бы на m (k и m взаимно просты!), что невозможно, так как $x_2 - x_1 < m$. Итак, при некотором из указанных значений x остаток равен нулю; следовательно, число $y = (1 - xk) : m$ является целым. Эти x и y и составляют искомое решение уравнения $xk + ym = 1$.

известии доплату по 5 копеек за каждый номер.

Для тех, кто не успел подписаться на «Квант» с начала года, напоминаем, что подписка на него принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.



Школа «Квант»

Математика 8—10

Геометрические преобразования

Часть I: Движения

Публикуемая заметка адресована восьмиклассникам, однако она, несомненно, будет полезна девятиклассникам и десятиклассникам, готовящимся к соревнованиям на олимпиадах или к поступлению в вузы.

Э. Г. ГОТМАН

Преобразования плоскости — движения и подобия — во многих случаях позволяют экономно и изящно решать геометрические задачи. В последние два года «Квант» дважды обращался к этой теме (см. № 12 за 1986 г. и № 8 за 1987 г.). Разумеется, мы не предполагаем у читателя

знакомства с этими статьями и сначала изложим необходимые для решения задач теоретические сведения.

Напомним основные определения.

Движение — это преобразование плоскости, при котором расстояние между образами любых двух точек равно расстоянию между этими точками. Выделим три специальных вида движений.

Поворот вокруг точки O на угол α — это преобразование, при котором точка O переходит в себя, а произвольная точка A , отличная от O , переходит в такую точку A' , что $OA' = OA$ и угол между лучом OA и лучом OA' , отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, равен α . Подчеркнем, что у нас поворот — это всегда поворот против часовой стрелки; скажем, поворот на 30° по часовой стрелке — это для нас поворот на 330° .

Параллельный перенос на вектор a — это преобразование, при котором произвольная точка A переходит в та-

кую точку A' , что вектор $\overline{AA'}$ равен \bar{a} .

Осевая симметрия с осью l — это преобразование, при котором произвольная точка A переходит в точку A' , симметричную A относительно прямой l . Точки самой прямой l остаются при этом преобразовании неподвижными.

Очевидно, поворот вокруг точки, параллельный перенос и осевая симметрия сохраняют расстояния между точками и, следовательно, являются движениями. Центральную симметрию мы не выделяем в отдельный вид движения: это частный случай поворота — поворот вокруг центра симметрии на 180° .

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: R_O^α — поворот вокруг точки O на угол α , T_a — параллельный перенос на вектор a , S_l — осевая симметрия с осью l . Через E мы обозначаем тождественное преобразование (при котором все точки переходят в себя). Например, параллельный перенос на нулевой вектор есть тождественное преобразование: $T_0 = E$. Равным образом поворот (вокруг любой точки) на 360° возвращает все точки в исходное положение: $R_O^{360^\circ} = E$. Добавим к этому, что всегда $R_O^{\alpha+360^\circ} = R_O^\alpha$, поэтому углы поворота целесообразно задавать с точностью до 360° . Обычно в записи R_O^α предполагается, что $0 \leq \alpha < 360^\circ$.

Очевидно, что при любом движении сонаправленные лучи переходят в сонаправленные лучи. Ясно также, что при любом параллельном переносе произвольный луч переходит в сонаправленный с ним луч. По-другому дело обстоит при повороте.

Теорема 1. При повороте угол между произвольным лучом и его образом равен углу поворота.

Доказательство. В частном случае, когда начало данного луча совпадает с центром O поворота, это утверждение очевидно. Если начало данного луча k отлично от O , то из точки O проведем луч h , сонаправленный с лучом k (рис. 1). Так как любое движение переводит сонаправленные лучи в сонаправленные, то образы k' и h' лучей k и h тоже

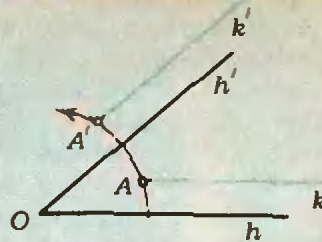


Рис. 1.

сонаправлены. Следовательно, угол между k и k' равен углу между h и h' , т. е. равен углу поворота.

Уже эта простая теорема может эффективно использоваться при решении задач.

Упражнения

1. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ACB_1 и BCA_1 . Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 равны. Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1 .

Указание. Убедитесь, что с помощью поворота вокруг точки C на 60° отрезок BB_1 можно совместить с отрезком AA_1 (треугольник ABC считается положительно ориентированным *).

2. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2 . Докажите, что а) отрезки AB_1 и A_1B равны и перпендикулярны; б) центры построенных квадратов и середины отрезков AB и A_1B_1 являются вершинами третьего квадрата.

Движения первого рода

Пусть теперь F — произвольное движение, A, B, C — три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' — образы этих точек при преобразовании F . Тогда ABC и $A'B'C'$ — равные треугольники, но они могут быть ориентированы по-разному. Движение F называется *движением первого рода*, если для любого треугольника ABC ориентация этого треугольника совпадает с ориентацией треугольника $A'B'C'$. В противном случае

* Напомним, что треугольник ABC считается положительно ориентированным, если обход его вершин в порядке A, B, C происходит против часовой стрелки, и отрицательно ориентированным в противном случае. (Не лишне заметить, что треугольники ABC и ACB , которые геометрически не отличаются друг от друга, ориентированы противоположным образом.)

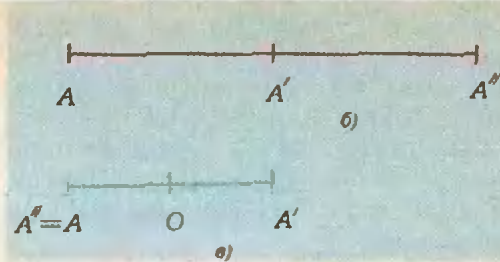
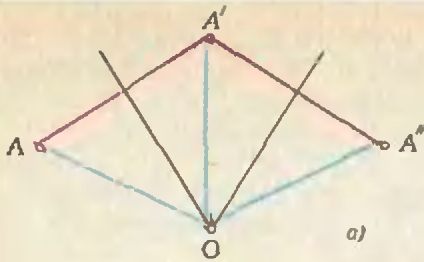


Рис. 2

движение F называется *движением второго рода**).

Примером движения второго рода может служить осевая симметрия. Повороты и параллельные переносы — движения первого рода.

Теорема 2. *Всякое движение первого рода есть либо поворот, либо параллельный перенос (либо тождественное преобразование, которое, впрочем, является одновременно и поворотом, и параллельным переносом).*

Доказательство этой теоремы опирается на лемму.

Лемма. *Если два движения первого рода одинаково воздействуют на две различные точки, то они совпадают.*

Доказательство леммы. Пусть A и B — две упомянутые в формулировке точки; A' и B' — их образы при движениях. Пусть C — еще одна точка, C' — ее образ при первом движении, C'' — ее образ при втором движении. Тогда $C'A' = CA = C''A'$ и $C'B' = CB = C''B'$. Таким образом, точки C' и C'' находятся на одинаковых расстояниях от точек A' и B' . К тому же треугольники $A'B'C'$ и $A'B'C''$ одинаково ориентированы (последнее замечание относится к случаю, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой). Из сказанного следует, что $C' = C''$, а это и означает, ввиду произвольности точки C , что движения совпадают (см. п. 19 учебного пособия «Геометрия 6—10»).

* На самом деле, можно доказать, что если движение сохраняет ориентацию хотя бы одного треугольника, то оно сохраняет ориентацию любого треугольника, т. е. является движением первого рода. Другими словами, всякое движение второго рода обращает ориентацию любого треугольника. Нам эти факты не понадобятся.

Доказательство теоремы 2. Предложим, что наше движение F не является тождественным преобразованием. Тогда найдется точка A , образ A' которой не совпадает с A . Обозначим через A'' образ точки A' . Отрезки AA' и $A'A''$ имеют одинаковую длину. Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения точек A, A' и A'' .

1) Точки A, A' и A'' не лежат на одной прямой (рис. 2, а). Построим серединные перпендикуляры к отрезкам AA' и $A'A''$; пусть O — точка их пересечения. Очевидно, $OA = OA' = OA''$ и $\angle AOA' = \angle A'OA''$. Поэтому поворот вокруг точки O , переводящий точку A в точку A' , переводит точку A' в точку A'' . Таким образом, движение F и поворот R_O^α , где $\alpha = \angle AOA'$, воздействуют на точки A и A' одинаково; значит, в силу леммы они совпадают: $F = R_O^\alpha$.

2) Точки A, A' и A'' лежат на одной прямой в указанном порядке, т. е. точка A' является серединой отрезка AA'' (рис. 2, б). Тогда параллельный перенос на вектор AA' переводит A в A' и A' в A'' . Движение F и этот перенос одинаково воздействуют на точки A и A' и поэтому совпадают: $F = T_{AA'}$.

3) Точки A и A'' совпадают (рис. 2, в). Пусть O — середина отрезка AA' . Центральная симметрия с центром O переводит точку A в точку A' , а точку A' — в точку A'' . Значит, движение F является центральной симметрией: $F = R_O^{180^\circ}$.

Теорема доказана.

Итак, всякое движение первого рода есть либо поворот, либо параллельный перенос. Различать их можно

по числу неподвижных точек: при параллельном переносе на ненулевой вектор все точки меняют свое положение, т. е. неподвижных точек нет; при ненулевом повороте имеется только одна неподвижная точка — центр поворота. Тожественное преобразование оставляет все точки плоскости неподвижными.

Композиции движений

Нетривиальность теоремы 2 чаще всего проявляется в ситуациях, когда рассматривается движение первого рода, из построения которого не видно, что это — поворот или параллельный перенос. Примером такого движения может служить композиция двух или более движений первого рода.

Композицией двух преобразований называется преобразование, которое получится, если сначала применить первое преобразование, а потом — второе. Композиция преобразований F и G обозначается символом $G \circ F$. (Таким образом, преобразование $G \circ F$ состоит в том, что применяется сначала F и потом G ; такой порядок записи оправдывается тем, что если A — произвольная точка, то $G \circ F(A) = G(F(A))$.)

Очевидно, композиция двух движений первого рода есть движение первого рода. Ввиду этого из теоремы 2 вытекает неожиданное

Следствие 1. *Композиция двух поворотов есть либо поворот, либо параллельный перенос, либо тождественное преобразование.*

Мы уточним это утверждение, указав, когда какая из трех этих возможностей реализуется.

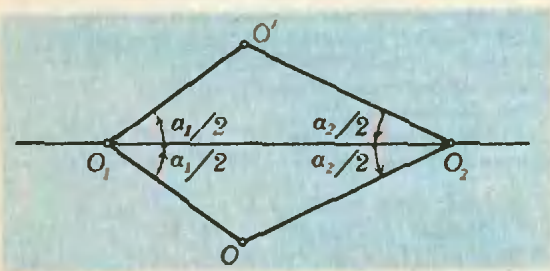


Рис. 3.

Теорема 3. Пусть $R_{O_1}^{\alpha_1}$ и $R_{O_2}^{\alpha_2}$ — два поворота, причем $0 < \alpha_1 < 360^\circ$ и $0 < \alpha_2 < 360^\circ$, и пусть $F = R_{O_2}^{\alpha_2} \circ R_{O_1}^{\alpha_1}$ — их композиция. 1) Преобразование F является тождественным тогда и только тогда, когда $O_1 = O_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ$. 2) Если $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ$, но $O_1 \neq O_2$, то F есть параллельный перенос. 3) Если $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 360^\circ$, то F есть поворот на угол $\alpha_1 + \alpha_2$ вокруг некоторой точки.

Мы оставляем доказательство этой теоремы читателю, ограничившись описанием построения центра O результирующего поворота в случае 3).

Если $O_1 = O_2$, то O совпадает с O_1 и O_2 . Пусть $O_1 \neq O_2$. Воспользуемся тем, что O — неподвижная точка композиции F . Пусть $R_{O_1}^{\alpha_1}(O) = O'$; тогда $R_{O_2}^{\alpha_2}(O') = O$ (рис. 3). Отсюда следует, что $O_1O' = O_1O$ и $O_2O' = O_2O$, ввиду чего точки O и O' симметричны относительно прямой O_1O_2 . Учитывая, что $\angle OO_1O' = \alpha_1$ и $\angle O'O_2O = \alpha_2$, получаем следующий результат. Если $O_1 \neq O_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 < 360^\circ$, то треугольник OO_1O_2 положительно ориентирован и $\angle OO_1O_2 = \frac{\alpha_1}{2}$, $\angle O_1O_2O = \frac{\alpha_2}{2}$. Если $O_1 \neq O_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 > 360^\circ$, то треугольник OO_1O_2 отрицательно ориентирован и $\angle OO_1O_2 = 180^\circ - \frac{\alpha_1}{2}$, $\angle O_1O_2O = 180^\circ - \frac{\alpha_2}{2}$.

Упражнения

3. Докажите, что композиция параллельного переноса и поворота является поворотом на тот же угол. Найдите центр этого поворота.

4. Докажите, что композиция четного числа осевых симметрий есть либо параллельный перенос, либо поворот, либо тождественное преобразование.

Как мы видели, композиция двух поворотов является тождественным преобразованием только тогда, когда центры поворотов совпадают. Оказывается, композиция трех поворотов может быть тождественным преобразованием и в том случае, когда центры поворотов различны. Например, если ABC — отрицательно ориентированный равносторонний треугольник, то $R_C^{120^\circ} \circ (R_B^{120^\circ} \circ R_A^{120^\circ}) = R_C^{120^\circ} \circ R_C^{240^\circ} = R_C^{360^\circ} = E$.

Выведите самостоятельно из теоремы 3 следующее утверждение:

Следствие 2. *Композиция трех поворотов тогда и только тогда является тождественным преобразованием, когда она имеет хотя бы одну неподвижную точку и сумма углов поворота равна 360° или 720° .*

Покажем, как свойства композиции поворотов применяются к решению задач.

Задача. *На сторонах BC и CA треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники BCN и CAP . Найдите углы треугольника MON , где M — середина стороны AB и O — центр треугольника CAP .*

Решение. Для определенности будем считать, что треугольник ABC ориентирован положительно. Произведем последовательно три поворота с центрами O, N, M на углы

$120^\circ, 60^\circ, 180^\circ$ в направлении против часовой стрелки. При первом повороте точка A перейдет в точку C , при втором — точка C в B , при третьем — точка B в A , т. е. композиция $F = R_M^{180^\circ} \circ R_N^{60^\circ} \circ R_O^{120^\circ}$ возвращает точку A в исходное положение. Поскольку сумма углов поворота равна 360° и $F(A) = A$, F есть тождественное преобразование (см. следствие 2). Согласно теореме 3 имеем $R_N^{60^\circ} \cdot R_O^{120^\circ} = R_K^{180^\circ}$, где K — точка пересечения прямых, проходящих через точки O и N и образующих углы $KON = 60^\circ$ и $ONK = 30^\circ$. Композиция $F = R_M^{180^\circ} \circ R_K^{180^\circ} = E$. Значит, точки K и M совпадают, и углы треугольника MON равны $90^\circ, 60^\circ$ и 30° .

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите в целых числах уравнение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^n.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 &= 1, \\ x_2 x_3 x_4 &= -1, \\ x_3 x_4 x_5 &= 1, \\ &\dots \\ x_{10} x_1 x_2 &= -1. \end{aligned}$$

3. По окружности вписаны 30 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Сумма всех чисел равна 20. Найдите эти числа.

4. Докажите, что в круге радиусом 1 нельзя выбрать более пяти точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

5. На встрече собрались все участники двух туристских походов. Некоторые из них были в обоих походах, некоторые — только в одном из них. В первом походе было 60% мужчин, во втором — 75%. Докажите, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

Девятый класс

6. Дана функция $p(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Найдите сумму

$$\begin{aligned} & p\left(\frac{1}{1}\right) + p\left(\frac{2}{1}\right) + \dots + p\left(\frac{100}{1}\right) + \\ & + p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{2}{2}\right) + \dots + p\left(\frac{100}{2}\right) + \\ & + p\left(\frac{1}{100}\right) + p\left(\frac{2}{100}\right) + \dots + p\left(\frac{100}{100}\right). \end{aligned}$$

7. Докажите, что среди чисел вида $\frac{k!(k+1)}{2}$ бесконечно много точных квадратов.

8. Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.

9. Пусть MA и MB — касательные к окружности. C — точка ограничиваемого этой окружностью круга, лежащая на дуге AB окружности с центром M . Докажите, что отличные от A и B точки пересечения прямых AC и BC с данной окружностью диаметрально противоположны.

10. Дан равносторонний треугольник ABC . Найдите геометрическое место таких точек M , что треугольники AMB и BMC равнобедренные.

Десятый класс

11. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$(a^a b^b c^c)^2 \geq a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}.$$

12. Пусть a, b, c, d — произвольные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2da \geq -\frac{1}{4}.$$

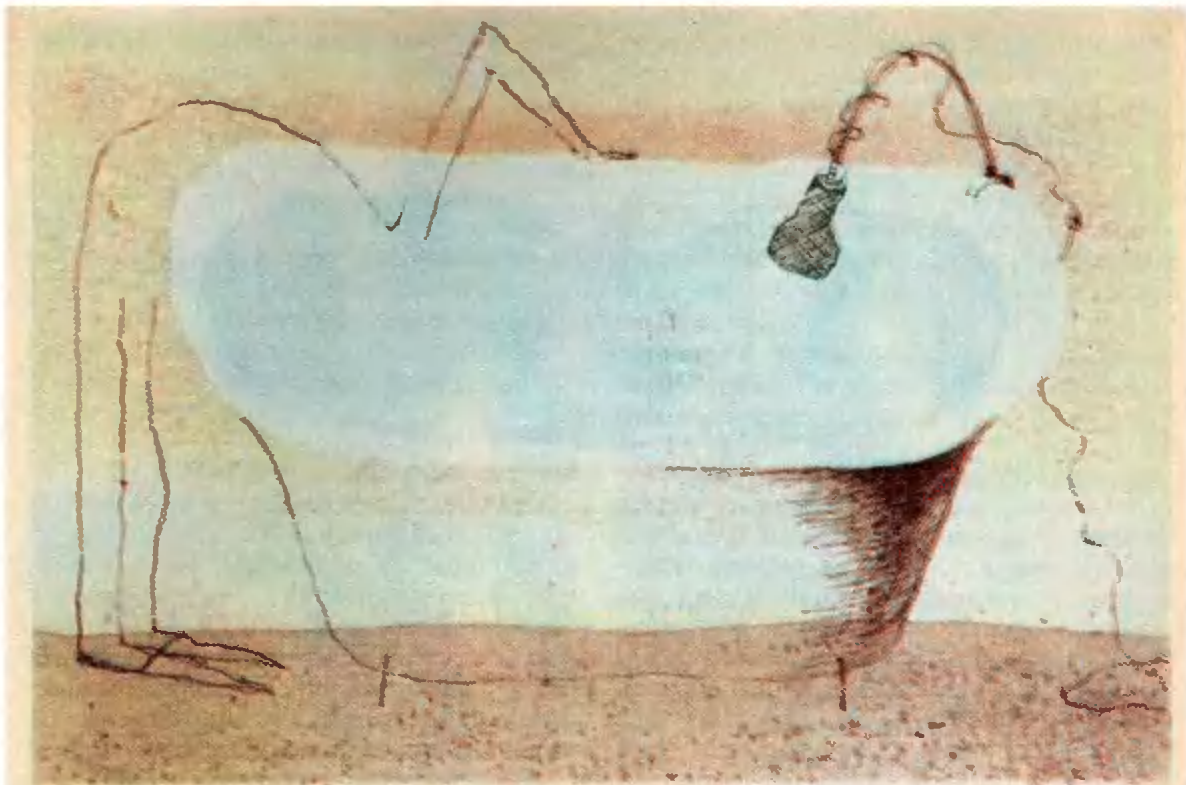
13. Докажите, что если одна из высот тетраэдра пересекает две другие высоты, то все четыре высоты пересекаются в одной точке.

14. Можно ли на каждом ребре тетраэдра поставить стрелку так, чтобы сумма шести полученных векторов равнялась 0?

15. Докажите, что:
 - а) числа $\operatorname{tg}^2 20^\circ, \operatorname{tg}^2 40^\circ, \operatorname{tg}^2 80^\circ$ являются корнями уравнения $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$;

$$\begin{aligned} & \text{б) } \frac{1}{\cos^2 20^\circ} + \frac{1}{\cos^2 40^\circ} + \frac{1}{\cos^2 60^\circ} + \\ & + \frac{1}{\cos^2 80^\circ} = 40. \end{aligned}$$

Публикацию подготовил Л. Д. Курляндчик



Лаборатория "Кванта"

Одной из самых важных оптических характеристик вещества является его показатель преломления. Он показывает во сколько раз скорость света в веществе меньше скорости света в вакууме. Измерить показатель преломления можно с помощью специального прибора — рефрактометра (от латинского *refractus* — преломленный и греческого *metrôō* — измеряю). Существуют различные типы рефрактометров. С двумя из них мы и хотим вас познакомить. В первой заметке рассказывается о том, как, основываясь на законах преломления и отражения света и используя вполне доступные в до-

машних условиях приборы, можно легко и просто определить показатель преломления воды, глицерина, подсолнечного масла или какой-нибудь другой прозрачной жидкости.

Во второй заметке обсуждается интерференционный метод рефрактометрии, который позволяет определить показатель преломления исследуемой жидкости (или газа), сравнивая ее с какой-либо хорошо изученной жидкостью (или газом).

Предлагаемый вашему вниманию лазерный интерференционный рефрактометр вполне можно собрать в школьном физическом кабинете.

Рефрактометр для домашней лаборатории

Кандидат педагогических наук
Я. Е. АМСТИСЛАВСКИЙ

Оказывается, с помощью несложных и доступных в домашних условиях средств можно измерить важные оп-

тические характеристики некоторых физических устройств и свойств вещества.

Рассмотрим, например, простой способ измерения фокусных расстояний линз и зеркал и радиусов кривизны их поверхностей — это может пригодиться юному конструктору-астроному — и метод определения показателя преломления жидкости — а это полезно всем.

Опыт 1. Возьмем небольшой полупрозрачный экран в виде листка ватмана, в средней части которого встроена лампочка от карманного фо-

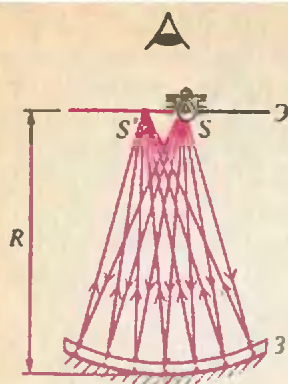


Рис. 1.

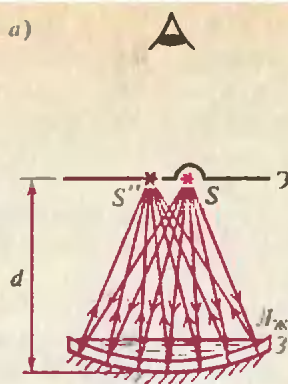
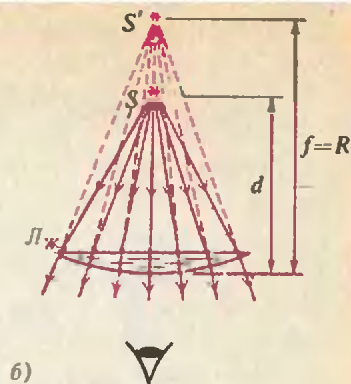


Рис. 2.



б)

нарика. (Более подробно об экранных осветителе будет рассказано ниже.) Закрепим лампочку так, чтобы ее нить находилась в плоскости экрана. Расположим осветитель-экран Э над лежащим на столе вогнутым сферическим зеркалом З таким образом, чтобы нить S, играющая роль точечного источника света, оказалась вблизи главной оптической оси зеркала (линии, соединяющей вершину зеркала с центром его сферической поверхности), а плоскость экрана была перпендикулярна этой оси (рис. 1).

Перемещая экран по высоте и наблюдая за ним сверху, мы без труда найдем такое положение, при котором на экране рядом с источником S появится резкое и яркое изображение S'. Достижение такого положения означает, что центр кривизны зеркала также находится на поверхности экрана — только в этом случае лучи от источника идут почти нормально к сферической поверхности зеркала и, изменяя при отражении свое направление на противоположное, фокусируются рядом с S. Для определения радиуса кривизны R зеркала остается только измерить расстояние от экрана Э до полюса (вершины) зеркала З.

Опыт 2. Усложним опыт, налив на зеркало З небольшое количество исследуемой жидкости, например воды. Тогда поверх зеркала образуется тонкая жидкая линза Л_ж (рис. 2, а), причем первая по ходу луча поверхность этой линзы плоская, т. е. имеет радиус кривизны $r_1 \rightarrow \infty$, а вторая выпуклая — она соприкасается с поверх-

ностью зеркала, т. е. $r_2 = R$.

Если вода покрывает не все зеркало, то изображение S' на экране Э, удаленном от зеркала З на расстояние R, сохраняется — оно создается свободной частью поверхности зеркала. Но, опустив экран примерно на 0,3 R (для разных жидкостей эта величина различна), мы получим второе четкое и яркое изображение S'', формируемое той частью зеркала, которая покрыта жидкостью. Для появления этого изображения в плоскости экрана необходимо, чтобы после преломления на плоской поверхности жидкой линзы лучи падали на зеркало снова почти нормально к его поверхности. Только при таких условиях отражения лучи меняют свое направление на 180° и формируют изображение S'' по соседству с S.

Предположим, что мы добились появления четкого изображения S''. Обозначим соответствующее расстояние от плоскости экрана до полюса зеркала через d. Отделим теперь мысленно жидкую линзу Л_ж от зеркала (рис. 2, б). В отсутствие зеркала лучи, которые, как мы установили, падают на нижнюю поверхность линзы нормально, прошли бы эту поверхность без отклонения и сформировали мнимое изображение S' в точке пересечения продолжения лучей, т. е. в центре кривизны сферической поверхности на расстоянии $f=R$. Поэтому формула тонкой линзы для нашего случая имеет вид:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{R} = \frac{1}{F}, \quad (1)$$

где F — фокусное расстояние линзы.

От чего оно может зависеть? Очевидно, что от показателя преломления жидкости n (считаем, что окружающий линзу воздух по своим оптическим параметрам не отличается от вакуума) и от радиусов кривизны ее поверхностей r_1 и r_2 . Как показывают расчеты (вы их вполне можете воспроизвести, для чего вам понадобится лишь закон преломления света и немного геометрии), фокусное расстояние тонкой линзы определяется выражением:

$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (2)$$

причем для выпуклой по ходу луча поверхности $r > 0$, а для вогнутой $r < 0$. В нашем случае $r_1 \rightarrow \infty$, а $r_2 = -R$, поэтому из равенств (1) и (2) имеем

$$n = R/d. \quad (3)$$

Таким образом, для определения показателя преломления жидкости необходимо лишь измерить два расстояния от экрана \mathcal{E} до зеркала \mathcal{Z} , при которых на экране формируются четкие изображения S' и S'' , и найти отношение большего расстояния к меньшему.

Опыт 3. Заменяем теперь жидкую линзу $L_{ж}$ стеклянной линзой L_1 , а вогнутое зеркало \mathcal{Z} небольшим плоским зеркальцем \mathcal{Z}_1 (рис. 3; для наглядности линза несколько приподнята над зеркалом). Перемещая осветитель-экран \mathcal{E} по высоте, добьемся появления на нем яркого изображения S' рядом с источником S . Нетрудно понять, что это произойдет, когда экран совместится с фокальной плоскостью линзы. Поэтому для

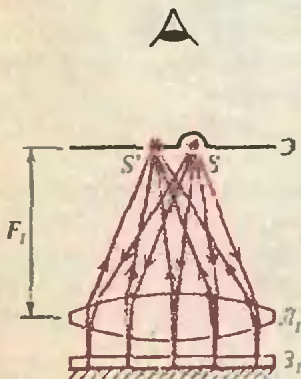


Рис. 3.

определения фокусного расстояния F_1 линзы достаточно измерить расстояние от экрана в указанном его положении до центрального сечения линзы. (Заметим, что аналогичный метод, известный как метод автоколлимации, используется для установления необходимой в ряде оптических схем начальной ориентации зрительной трубы.)

Опыт 4. Приближим теперь осветитель-экран \mathcal{E} к линзе L_1 . При некотором расстоянии d_1 , которое для двояковыпуклой симметричной линзы составляет около $0,5 F_1$, на экране снова появляется четкое изображение — S'' , хотя и не такое яркое, как S' . Оно создается за счет отражения, хотя и сравнительно слабого, от нижней полированной поверхности линзы, играющей роль вогнутого зеркала с невысоким коэффициентом отражения ($\rho \approx 0,05$). В этом нетрудно убедиться, сняв линзу с зеркала и перенеся ее прямо на стол (или на книгу, или на темную ворсистую поверхность): изображение S'' сохраняется и даже становится более контрастным.

Природа изображения S'' та же самая, что и в случае жидкой линзы во втором опыте, с той лишь разницей, что жидкая линза заменена стеклянной и первая по ходу луча поверхность линзы может быть выпуклой, а коэффициент отражения от нижней поверхности линзы имеет малую величину. Поэтому к изображению S'' вполне применима формула (1). Изменяя F_1 (по положению изображения S'), d_1 (по положению изображения S'') и используя формулу (1), мы можем рассчитать радиус кривизны r нижней по ходу луча поверхности линзы L_1 :

$$r_1 = \frac{F_1 d_1}{F_1 - d_1}. \quad (4)$$

Если поверхности линзы имеют разную кривизну, то надо измерить два значения d_1 и d_2 для случаев, когда линза лежит на одной и на другой своей поверхности, и рассчитать r_1 и r_2 .

Применим к стеклянной линзе L_1 формулу (2) и выразим показатель

преломления n стекла. В случае плосковыпуклой линзы $r_1 \rightarrow \infty$, $r_2 = -r$, и мы снова приходим к формуле (3), которая с учетом формулы (4) принимает вид

$$n = \frac{r}{d} = \frac{F_1}{F_1 - d_1} = 1 + \frac{d_1}{F_1 - d_1}.$$

В случае двояковыпуклой симметричной линзы $r_1 = r$, $r_2 = -r$, и

$$n = 1 + \frac{d_1}{2(F_1 - d_1)}.$$

Опыт 5. При помощи стеклянной линзы и плоского зеркала нетрудно определить показатель преломления $n_{ж}$ произвольной неизвестной жидкости, причем, в отличие от рассмотренного во втором опыте способа, для этой цели достаточно всего лишь нескольких капель жидкости, которая к тому же может быть и малопрозрачной.

Нанесем 3—4 капли исследуемой жидкости на зеркало $З_1$ и покроем его линзой $Л_1$ (рис. 4). Между нижней поверхностью линзы и поверхностью зеркала образуется тонкая вогнутоплоская жидкая линза $Л_2$. Первая по ходу луча ее поверхность вогнутая — она соприкасается со второй поверхностью стеклянной линзы, т. е. $r_{1ж} = -r$, а вторая поверхность жидкой линзы плоская, т. е. $r_{2ж} \rightarrow \infty$, и формула (2) для $Л_2$ принимает вид

$$\frac{1}{F_2} = -(n_{ж} - 1) \frac{1}{r}.$$

Линза $Л_2$ вместе со стеклянной линзой $Л_1$ образуют оптическую систему $Л_3$, фокусное расстояние которой F_3 можно измерить описанным в третьем опыте способом. Для оптической силы системы $Л_3$, состоящей из двух соприкасающихся тонких линз, имеем (это выражение нетрудно получить самостоятельно)

$$\frac{1}{F_3} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Выразим отсюда оптическую силу жидкой линзы через легко измеряемые фокусные расстояния F_1 и F_3 :

$$\frac{1}{F_2} = -\frac{F_3 - F_1}{F_1 F_3}. \quad (5)$$

Тогда для $n_{ж}$ получим

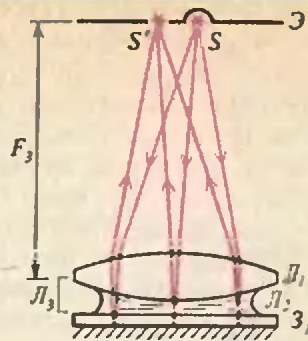


Рис. 4.

$$n_{ж} = 1 + \frac{d_1(F_3 - F_1)}{F_1(F_1 - d_1)}.$$

Если поверхности линзы имеют различные радиусы кривизны, то, касаясь жидкости разными поверхностями линзы, мы измерим разные пары значений d_1 и F_3 . Но, независимо от ориентации такой линзы, обе рассчитанные величины $n_{ж}$ для данной жидкости должны оказаться одинаковыми (с точностью до возможной погрешности результата). Поэтому в случае несимметричной линзы можно провести два опыта с одной и той же жидкостью и получить два значения искомой величины $n_{ж}$.

Опыт 6. В заключение рассмотрим случай, представляющий собой комбинацию предыдущих опытов. Возьмем стекло от очков для дальнозорких — положительную менисковую линзу $Л_м$ небольшой оптической силы в 1,5—2 диоптрии. Проведем с этим стеклом последовательно три опыта: № 1, № 3 и № 3 + № 2 (схемы опытов приведены на рисунке 5) и измерим соответственно величины R_1 , F_1 и F_3 . Тогда на основании формул (2) и (5) получим следующее выражение для расчета показателя преломления налитой на поверхность линзы $Л_м$ жидкости:

$$n_{ж} = 1 + \frac{R_1(F_1 - F_3)}{F_1 F_3}.$$

Несколько полезных советов и замечаний. Перейдем теперь к более подробному описанию используемых для опытов приборов и материалов, а также методики проведения самих опытов.

Основной (и по существу единственной) частью прибора, которую не-

обходимо изготовить собственными руками в условиях домашней лаборатории, является осветитель-экран. С этой целью поступают следующим образом. Из картона вырезают кружок диаметром 20—25 мм, в его средней части проделывают отверстие диаметром 8—9 мм, «навинчивают» этот кружок на цоколь лампочки от карманного фонарика и продвигают вплоть до баллончика лампы. Насаженный картонный кружок служит основанием для распорного бумажного колечка с подклеенным к нему экраном. Колечко изготавливают из полоски ватмана шириной 15 мм и длиной 45 мм. Вдоль противоположных длинных краев полоски ножницами делают аккуратные поперечные прорезы глубиной 5 мм, следующие друг за другом через 2 мм. Затем вблизи одного из концов полоски срезают по три «лепестка» с каждого края, смазывают образовавшийся «хвостик» полоски клеем, свертывают полоску и склеивают получившееся колечко, прижав хвостик к средней части противоположного конца полоски. После высыхания клея все лепестки отгибают во внешнюю область на 90° и образовавшееся «колесико» приклеивают в качестве распорного к картонному кружку, а к противоположной стороне колесика приклеивают экран из ватмана размером в половину листа бумаги из школьного альбома для рисования (например, 15×20 см) с отверстием диаметром 12—13 мм в центральной части. Ширина распорного колесика рассчи-

тана так, чтобы нить лампочки оказалась в плоскости экрана. К цоколю лампочки подпайвают два тонких гибких проводника длиной в 1,5—2 м, которые во время опыта присоединяют к клеммам батарейки от карманного фонарика на 4,5 В. Цоколь можно обмотать в один слой изоляцией и держать за него осветитель-экран во время опытов. Для уменьшения ненужной засветки экрана боковыми лучами от лампочки распорное колесико можно обклеить изнутри полосками черной бумаги.

Рассмотренные в опытах 1—6 способы измерения величин R , F , n и $n_{ж}$ практически равнозначны по идее и доступности исполнения. Однако некоторые различия все же есть. Например, если целью измерений является величина $n_{ж}$ и в домашней лаборатории имеется какой-то выбор зеркал и линз, то предпочтение следует отдать оптике с большим радиусом кривизны поверхностей. При $R \sim 0,5$ м и аккуратном выполнении измерений относительная ошибка результата не превосходит 1%. Из трех способов определения $n_{ж}$, описанных в опытах 2, 5, 6, способ 5 отличается тем, что позволяет, как уже отмечалось, ограничиться лишь несколькими каплями исследуемой жидкости. Однако подробно мы остановимся только на способе, описанном в опыте 6.

В опыте используются карманное плоское зеркальце и очковая линза $+2,0/60$ (положительный мениск с оптической силой $+2$ дптр и диаметром 60 мм; такую линзу можно ку-

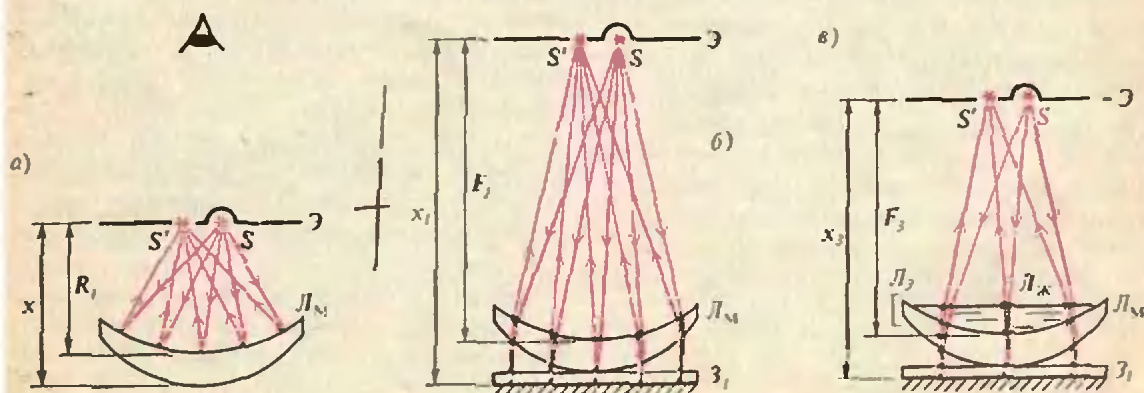


Рис. 5.

пить в магазине «Оптика» за 65 коп). Для проведения измерений достаточно половины чайной ложки жидкости. Это может быть вода, сахарный сироп, подсолнечное масло, глицерин, спиртовой раствор лекарственного препарата или какая-либо другая жидкость. При измерении R по схеме, приведенной на рисунке 5, а, следует иметь в виду, что в случае линзы-мениска зеркальное изображение создает как первая (верхняя), так и вторая (нижняя) поверхности линзы. Первая поверхность создает изображение при расстоянии d_1 от экрана до данной поверхности, равном искомому радиусу кривизны R_1 . Вторая же поверхность, имеющая значительно меньший радиус кривизны R_2 , — при расстоянии $d_2 < R_2 < R_1$. Поэтому для определения искомой величины R надо из двух изображений, формируемых линзой L_m , зафиксировать то, которое более удалено от линзы, и измерить расстояние от экрана до полюса верхней поверхности линзы. Если при этом линза лежит на столе и измеряется расстояние x от стола до экрана в нужном его положении, то с учетом толщины линзы L_m , которая в средней части мениска составляет около $a = 3$ мм, будем иметь: $R_1 = x - a$. Фокусные расстояния F_1 (рис. 5, б) и F_3 (рис. 5, в) в случае линзы-мениска можно измерить лишь приближенно. Будем отсчитывать их также от первой (верхней) поверхности линзы L_m . Поскольку теперь линза лежит на зеркальце, толщина которого b , то получим

$$F_1 = x_1 - (b + a) \text{ и } F_3 = x_3 - (b + a).$$

Если опыт выполняют с линзой, для которой величины R_1 и F_1 уже известны по ранее сделанным измерениям или по паспорту линзы, то для определения $n_{ж}$ достаточно измерить только одну величину — F_3 . При условии, что все измерения и расчеты сделаны правильно, для воды, например, должно получиться значение $n_{ж} = 1,33 \pm 0,01$.

Лазерный рефрактометр

Кандидат физических наук

Д. Д. ХРИСТОЗОВ

(г. Пловдив, НРБ)

С появлением лазеров многие оптические опыты и демонстрации стали более простыми и наглядными. Это относится, например, к экспериментам по дифракции монохроматического света.

Прибор, с которым мы хотим вас познакомить, называется лазерным рефрактометром. С его помощью можно легко и быстро измерить скорость света в любой жидкой прозрачной среде и определить, тем самым, важную физическую характеристику этой среды — показатель преломления.

Лазерный рефрактометр нетрудно изготовить в школьном физическом кабинете. Самым важным элементом прибора, схематично изображенного на рисунке, является, конечно же лазер (L). Например, можно взять милливатный гелий-неоновый лазер, который сейчас наиболее распространен. Нужна еще дифракционная решетка (P). Ванну (B) для жидкости лучше всего сделать из какого-нибудь прозрачного материала, например из плексигласа, и придать ей трапециевидную форму. Роль фотоприемника в лазерном рефрактометре выполняет непосредственно глаз наблюдателя.

Дифракционную решетку можно закрепить на маленькой боковой стенке ванны, тогда дифракционную картину будет удобно наблюдать на большой боковой стенке-экране (\mathcal{E}). Чтобы наблюдаемая картина была ясной и отчетливой, стенку-экран лучше сделать матовой, а чтобы избежать нежелательных отражений, внутренние непараллельные стенки ванны хорошо бы зачернить.

Теперь о самом эксперименте.

Скорость света c в вакууме и скорость света v в некоторой прозрачной среде можно представить так:

$$c = \lambda_0 \nu, \quad v = \lambda \nu.$$

Здесь λ_0 и λ — соответствующие длины волн, ν — частота излучения. Разделив равенства почленно друг на друга, получим

$$\nu = c \frac{\lambda}{\lambda_0}. \quad (1)$$

Дифракционная решетка создает на экране картину чередующихся максимумов и минимумов освещенности. Максимумы наблюдаются в направлениях, определяемых следующим условием:

$$d \sin \varphi = k\lambda,$$

где d — период решетки, φ — угол наблюдения, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — номер соответствующего максимума.

Будем наблюдать за максимумом первого порядка. Тогда, положив $k=1$ и приняв во внимание, что для малых углов $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi$, условия максимумов для случаев вакуума и данной среды запишем в виде (см. рисунок)

$$\frac{db_0}{l} = \lambda_0, \quad \frac{db}{l} = \lambda.$$

Если эти равенства разделить друг на друга и отношение λ/λ_0 подставить в выражение (1), то получим рабочую формулу:

$$\nu = c \frac{b}{b_0}. \quad (2)$$

Согласно этой формуле, по известной скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, измерив b_0 и b , можно найти скорость света ν в интересующей нас среде. Вся задача сведется просто к измерению расстояний b_0 и b .

«Союз» открывает Турнир

(Начало см. на с. 15)

16. Сделай сам. Сконструлируйте и изготовьте прибор, демонстрирующий явление невесомости.

17. Придумай сам. Самостоятельно сформулируйте проблему-задачу и решите ее. Желательно, чтобы эта задача имела отношение к предстоящей экспедиции на Марс.

Решение задач необходимо отправить не позд-

нее 20 мая по адресу: 119899 Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, кафедра физики колебаний, Оргкомитет Турнира.

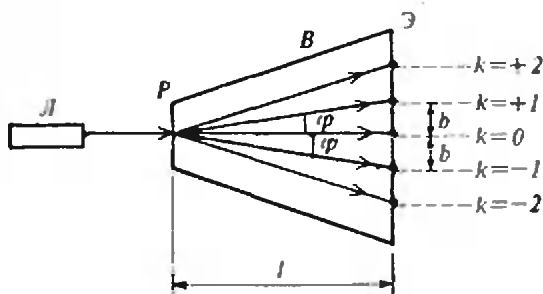
В конверт вложите: 1) почтовый адрес и телефон учебного заведения (или школьного учреждения); 2) список авторов решения (имена пишите полностью); 3) фамилию, имя, отчество и адрес руководителя команды.

Решение каждой задачи оформляйте отдельно. В начале решения обязательно укажите город и фамилии авторов решения. К экспериментальным задачам приложите

подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Не забудьте прислать нам почтовый конверт с маркой и четко написанным обратным адресом.

Коллективы школьников — победители заочного конкурса — станут участниками финала Турнира юных исследователей космоса, который будет проведен с 1 по 24 августа 1989 года в г. Уфе.

Публикацию подготовил Е. Н. Юносов — член Совета представителей общества «Союз»



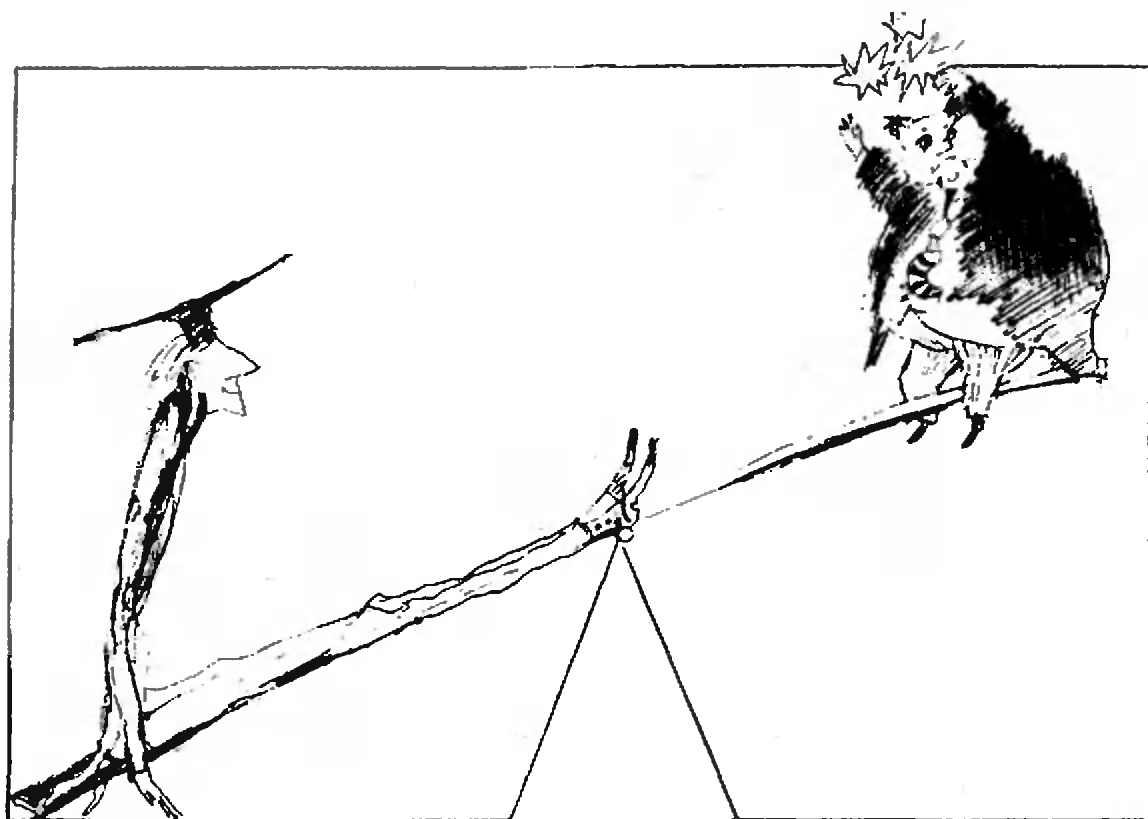
Как показывает опыт, эти расстояния оказываются достаточно большими, а значит, и точность измерений — достаточно высокой (если длина ванны l порядка 0,2—1 м).

Формулу (2) можно переписать в виде

$$n = \frac{c}{\nu} = \frac{b_0}{b},$$

где n — абсолютный показатель преломления исследуемой прозрачной среды. Значит, с помощью предлагаемого прибора наряду со скоростью света в веществе можно определить и его показатель преломления.

Как известно, первые классические опыты по определению скорости света в прозрачной среде проводились очень давно — в середине XIX века — и, конечно, с нелазерными источниками света. Опыты были довольно громоздкими, а точность измерений — невысокой. Лазер же дает возможность провести необходимый эксперимент быстро, четко и наглядно.



Трагикомедия абитуриента

Статика

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

В задачах этого раздела исследуют условия равновесия тел. Обычно эти условия используют для нахождения сил в исследуемой системе.

Напомним условия равновесия тела: сумма сил, действующих на тело со стороны других тел, должна быть равна нулю и сумма моментов этих сил относительно любой точки тоже должна быть нулевой.

Тут сразу может возникнуть вопрос: не получим ли мы сколько угодно уравнений, приравнивая нулю суммы моментов сил относительно разных точек, т. е. не получится ли уравнений больше, чем неизвестных? Оказывается, оснований для беспокойства нет — у системы сил, сумма которых равна нулю (а мы имеем дело как раз с такими) суммарный момент оди-

наков относительно любой точки, так что «лишних» уравнений не будет.*)

Для начала разберем совсем простую задачу.

Задача 1. *Прямая балка длиной $L=1$ м и массой $M=200$ кг подвешена за концы на вертикально натянутых тросах (рис. 1). Найдите их натяжения, если центр тяжести балки находится на расстоянии $L_1=0,3$ м от одного из ее концов.*

Ясно, что если тросы целы, то балка находится в равновесии. Запишем уравнение для сил:

$$T_1 + T_2 - Mg = 0. \quad (1)$$

Неизвестных величин две — T_1 и T_2 . Значит, нужно еще одно уравнение. Его мы получим, записав уравнение для моментов сил. Моменты можно брать относительно любой точки — выберем эту точку так, чтобы упростить решение системы уравнений.

*) Подробнее об этом можно прочитать в заметке «Равнодействующая — как ее найти?», опубликованной в 11—12 номере журнала за прошлый год.

Удобно взять ее на продолжении линии действия одной (а если получится, то и нескольких) из неизвестных сил. В нашем случае можно взять один из концов балки — например, левый:

$$MgL_1 - T_1L = 0. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получим

$$T_1 = Mg(L - L_1)/L = 1,4 \cdot 10^3 \text{ Н},$$

$$T_2 = MgL_1/L = 0,6 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Обратите внимание: вместо уравнения (1) можно было взять уравнение моментов относительно другого конца балки, тогда ответы можно было бы записать сразу. Попробуйте сами обосновать возможность такого выбора уравнений.

И еще одно замечание: если тросы растянулись совсем немного, то балка практически останется горизонтальной, и, значит, наше решение останется в силе. Раз так, то мы вообще вправе пренебрегать растяжением тросов (т. е. можно считать их нерастяжимыми). Однако бывает, что даже очень небольшие деформации могут привести к существенному перераспределению сил в системе, тогда деформациями уже нельзя пренебрегать. Такие случаи распознать нетрудно, пример такой системы мы рассмотрим позже.

Задача 2. Откидывающаяся часть окна (фрамуга) может поворачиваться вокруг горизонтальной оси O (рис. 2). Фрамуга приоткрыта и удерживается горизонтально натянутой веревкой, составляя угол α с вертикалью. Точка закрепления веревки находится на расстоянии L от оси, центр тяжести фрамуги — на расстоянии L_1 . Масса фрамуги M . Найдите величину и направление силы реакции в оси.

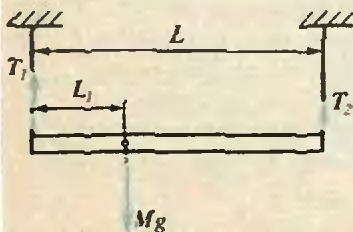


Рис. 1.

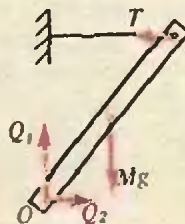


Рис. 2.

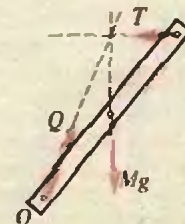


Рис. 3.

Проще всего найти проекции сил реакции Q_1 и Q_2 . Для них выполняются равенства:

$$Q_1 - Mg = 0, \quad Q_2 - T = 0.$$

Остается найти силу T . Запишем уравнение моментов относительно оси O :

$$TL \cos \alpha - MgL_1 \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$T = Mg \frac{L_1 \sin \alpha}{L \cos \alpha}.$$

Тогда

$$Q_1 = Mg, \quad Q_2 = Mg \frac{L_1 \sin \alpha}{L \cos \alpha}.$$

Собственно, мы решили задачу — нашли проекции искомой силы Q . Но ее направление можно было указать с самого начала: она должна «смотреть» в точку пересечения линий действия сил \vec{T} и $M\vec{g}$ (рис. 3). В самом деле, относительно этой точки ни сила \vec{T} , ни сила $M\vec{g}$ моментов не создают, значит, и оставшаяся сила \vec{Q} при равновесии должна быть направлена туда же.

Обратите внимание на то, что сила реакции в оси не направлена вдоль фрамуги. Это связано с тем, что у фрамуги есть вес. Для невесомого стержня, закрепленного шарнирно на концах, силы в осях будут направлены вдоль стержня (если не прикладывать к стержню дополнительных сил, кроме сил в осях).

Задача 3. Треугольник с углами 30° и 60° составлен из легких жестких стержней, скрепленных на концах с помощью шарниров. Груз массой $M = 2$ кг подвешен так, как показано на рисунке 4. Найдите деформации стержней. Площади сечения стержней $S = 0,5 \text{ см}^2$, модуль упругости $E = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$. Длина большего стержня $L = 0,2$ м. Изгибом стержней пренебречь.

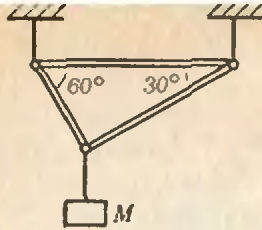


Рис. 4.

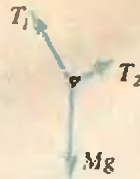


Рис. 5.

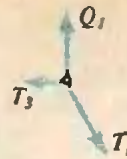


Рис. 6.

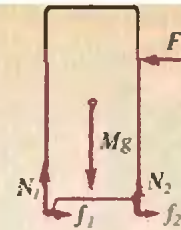


Рис. 7.

Задача сводится к нахождению сил, действующих на стержни в осях. (На стержни действуют силы со стороны шарниров. Если вы с трудом представляете себе устройство шарнира, вспомните раздвижной циркуль для рисования на доске или складной «метр».) Сами оси, как и стержни, также находятся в равновесии, запишем условия равновесия именно для них.

Для оси нижнего шарнира (рис. 5):

$$T_1 \cos 30^\circ + T_2 \cos 60^\circ - Mg = 0,$$

$$T_1 \sin 30^\circ - T_2 \sin 60^\circ = 0,$$

откуда

$$T_1 = Mg \sqrt{3} / 2, \quad T_2 = Mg / 2.$$

Для оси верхнего левого шарнира (рис. 6):

$$T_3 - T_1 \sin 30^\circ = 0,$$

$$T_1 \cos 30^\circ - Q_1 = 0,$$

откуда

$$T_3 = T_1 / 2 = Mg \sqrt{3} / 4.$$

Итак, верхний стержень сжат на

$$\Delta L_3 = T_3 L / (SE) = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

левый и правый стержни растянуты соответственно на

$$\Delta L_1 = T_1 L_1 / (SE) = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

и

$$\Delta L_2 = T_2 L_2 / (SE) = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Видно, что деформации стержней малы, значит, мы правильно сделали, что не учитывали изменения формы треугольника при расчете сил.

Эту задачу можно было решать и иначе — начать «распутывать» систему с верхних шарниров (силы Q_1 и Q_2 можно найти сразу, как в задаче 1).

Задача 4. На шероховатом полу стоит шкаф размерами $1 \times 1 \times 2.5$ м, равномерно заполненный ценными вещами. Шкаф стоит на четырех ножках, закрепленных по углам основания (т. е. в вершинах квадрата со сто-

роной 1 м). Пытаясь сдвинуть шкаф с места, его толкают в горизонтальном направлении силой, приложенной на высоте 1,5 м (рис. 7). При каких значениях коэффициента трения шкаф поедет, а не перевернется?

Будем искать условия опрокидывания и начала проскальзывания. Условие опрокидывания:

$$FH > N_1 L / 2$$

(перед опрокидыванием $N_2 = 0$). При этом

$$N_1 = Mg.$$

Пусть сила F чуть меньше граничного значения, в таком случае условие проскальзывания запишем в виде

$$F > f_1 = \mu N_1.$$

Теперь условие, поставленное в задаче, можно записать так:

$$Mg \frac{L}{2H} > F > \mu Mg.$$

А это возможно только при

$$\mu < L / (2H) = 1/3.$$

Обратите внимание на то, что нам не пришлось задавать высоту положения центра тяжести шкафа.

Вернемся теперь к задаче 1, усложнив ее.

Задача 5. Балка висит не на двух, а на трех тросах — третий трос держит балку посередине. Тросы нарезаны из одного куска, в нерастянутом состоянии тросы были одинаковой длины. Найдите силы натяжения тросов. Укажите: растяжения тросов малы и для упрощения расчетов тросы можно считать вертикальными. Деформациями балки пренебречь.

Нарисуем чертеж условно (рис. 8), сильно увеличив для наглядности деформации тросов. Из геометрических соображений

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{\Delta l_2 - \Delta l_3} = \frac{2}{1}, \quad \Delta l_2 = \frac{1}{2} (\Delta l_1 + \Delta l_3).$$

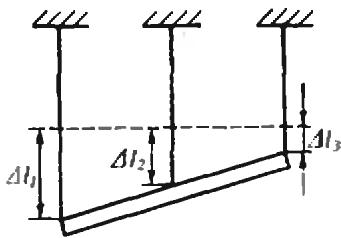


Рис. 8.

Уравнения сил и моментов:

$$T_1 + T_2 + T_3 = Mg.$$

$$MgL_1 - T_2 \frac{L}{2} - T_3 L = 0.$$

Считая деформации упругими, запишем:

$$T_1 : T_2 : T_3 = \Delta l_1 : \Delta l_2 : \Delta l_3.$$

Последнее уравнение дополняет условия равновесия, которых явно недостаточно для решения этой задачи (такие системы называют статически не определенными, имея в виду необходимость дополнительных уравнений). Теперь получилась система:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 + T_3 = Mg, \\ T_2 + 2T_3 = 2Mg \frac{L_1}{L}, \\ 2T_2 = T_1 + T_3. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$T_1 = Mg \left(\frac{5}{6} - \frac{L_1}{L} \right) = \frac{8}{15} Mg,$$

$$T_2 = \frac{1}{3} Mg,$$

$$T_3 = Mg \left(\frac{L_1}{L} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{15} Mg.$$

Это и есть обещанный выше пример: если тросы нерастяжимы, то достаточно взять средний чуть длиннее — и вся нагрузка ляжет на крайние, а если будет чуть короче, исчезнет нагрузка на правый трос. Понятно, что в этой задаче пренебречь растяжимостью тросов нельзя. Но даже если бы мы забыли об этом, задача сама напомнила бы нам — нехваткой уравнений.

Уравнения статики очень удобны; может быть, именно поэтому их порой применяют даже там, где равновесия нет (а значит, применять их нельзя). Широко известна, например, задача про велосипедиста, который едет по кругу, и требуется найти угол, на который велосипедист дол-

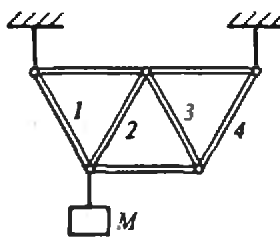


Рис. 9.

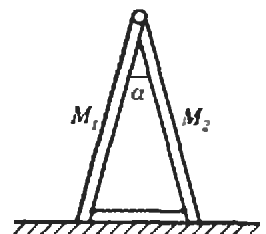


Рис. 10.

жен наклониться, чтобы не упасть (эта задача есть во многих задачниках, в том числе и в школьном задачнике — в издании 1983 года ее номер 279). Ответ там приведен, конечно, правильный, а вот как ее правильно решать?

В качестве решения обычно приводят такие рассуждения. Сила реакции, составляющими которой являются нормальная реакция N и сила трения $F_{тр}$, должна быть направлена вдоль тела так, чтобы проходить через центр тяжести, иначе велосипедист опрокинется. Понятно, что это рассуждение — просто пересказанное словами уравнение моментов относительно центра масс. Но ведь равновесия нет, сумма сил нулю не равна, почему же мы пользуемся уравнением моментов?

Оказывается, что в тех случаях, когда тело покоится относительно движущейся с ускорением системы отсчета (как в этом случае), уравнение моментов записывать можно, но только относительно единственной точки — центра масс. Обоснование этого «рецепта приготовления решений» выходит за рамки школьной программы (оно имеет отношение к разделу «Неинерциальные системы отсчета»). Простим авторам задачников, где помещена эта и подобные ей задачи, невинное жульничество — теперь мы знаем, как поступать в подобных случаях.

Упражнения

1. Жесткая система состоит из одинаковых легких стержней, скрепленных шарнирно (рис. 9). Найдите натяжение стержней 1, 2, 3 и 4. Сжаты эти стержни или растянуты?

2. Лестница-стремянка состоит из двух половин, скрепленных сверху шарнирно (рис. 10). Масса одной половины M_1 , другой — M_2 . Стремянку раскрывают на угол α и ставят на пол, а чтобы она не «разъезжалась», связывают веревкой нижние концы лестниц-половинок. Найдите натяжение веревки. Пол гладкий.

**Московский
государственный
университет
им. М. В. Ломоносова**

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sin 2x.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{5x} - 4x^{-x} > 0.$$

3. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P , равного 80° , пересекает сторону RS в точке L . Найдите радиус окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL , если известно, что $PQ=7$.

4. Угол между скрещивающимися прямыми

AB и CD равен $\arccos \frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD . Найдите угол ACB , если известно, что $AB=2\sqrt{5}$, $CD=2\sqrt{7}$ и $EF=\sqrt{13}$.

5. Два мотоциклиста стартовали отдельно в одной точке стадиона в гонке на 30 кругов, причем второй начал движение, когда первый прошел полкруга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда мотоциклисты были рядом. Когда через 4 минуты он вернулся, мотоциклисты снова были рядом. Если бы первый мотоциклист после 14 кругов увеличил скорость в 4 раза, а второй мотоциклист после 12 кругов — в 2 раза, то они финишировали бы одновременно. Определите, с какой разницей во времени финишировали мотоциклисты, если пришедший первым проезжал за минуту более 5 кругов.

6. Найдите все значения a , при которых система

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{z^2},$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2},$$

$$\sin(x-y) = \frac{2(x+y)}{(a-\pi)z}$$

имеет одно решение, удовлетворяющее условиям $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и $z > 0$.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и во-

семнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

2. Решите уравнение

$$\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x(\sin 2x - 1).$$

3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиусом 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB составляет 75° . Найдите площадь треугольника ABC .

4. Решите неравенство

$$8^x \geq 6 \cdot 9^{x-1}$$

5. Найдите все значения параметра a при которых уравнение

$$((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24} - 2(x^2+x)\lg a) \times$$

$$\times \lg\left(\frac{36a-9a^2}{35}\right) = 0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1 .

6. Сфера с центром в точке O пересечена плоскостью α . Внутри сферы расположены три шара, два из которых одного радиуса, а третий меньшего радиуса. Каждый из шаров касается двух других шаров, плоскости α и сферы. Известно, что синус угла между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскостью α равен $1/\sqrt{5}$, а косинус угла между радиусами меньшего и большего шаров, проведенными в точки касания их со сферой, равен $4/5$. Расстояние от центра меньшего шара до точки O равно 15. Найдите расстояние от точки O до плоскости α , если известно, что оно больше 14.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 2x + 8\sin x = 3.$$

2. В прямоугольном треугольнике величина острого угла равна α , а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R . Найдите длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4-6x-x^2} = x+4.$$

4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M такой, что $DM/MC=2$. Известно, что величина угла CAM равна α . Найдите величину угла BAD .

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол ACB — прямой, $AC=3$, $BC=4$, $SC=\sqrt{38}$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию ABC . В пирамиду вписан цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна $8\pi/3$. Нижнее основание цилиндра находится в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания имеет точку по одной общей точке с каждой из боковых граней пирамиды. Найдите радиус основания цилиндра.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\log_7(x-2) = \log_7(x-10)^2 - 2.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2} \cos x = \sqrt{-3} \sqrt{3} \sin x - 4.$$

3. Найдите точку графика функции $y = -1 - 2x^2$, ближайшую к точке $(1; \frac{3}{4})$.

4. В треугольник ABC с длиной стороны BC , равной 11, вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D . Известно, что длина отрезка AC равна длине отрезка CD и косинус угла BAC равен $\frac{1}{6}$. Найдите длину стороны AC .

5. Найдите все значения параметра a , при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} ax + 8y = 6a - 4, \\ x + y = 2a \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - 6x + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - (2a+4)x + 2(a^2 + a + 2) = 0. \end{cases}$$

Вариант 5

(биологический факультет)

1. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$6\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} + 2\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$2\log_{\sqrt{2}} 3 + \log_{\sqrt{2}} \left(3^{x^2-1} - \frac{1}{9} \right) < \log_{\sqrt{2}} 26.$$

3. Два экскаватора различной мощности, работая с постоянной производительностью, вырыли котлован заданного объема за 2 часа 24 минуты. Первый экскаватор, работая в одиночку, завершил бы эту работу на 2 часа быстрее, чем второй. Найдите время, за которое вырыл бы котлован второй экскаватор, работая в одиночку.

4. Площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3} - 3$, а угол BAC равен 60° . Радиус окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC , равен $\sqrt{3}$. Найдите углы ABC и BCA данного треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{4} + \sin \frac{\pi(x-2y)}{12} \right) \times \\ \times (\sqrt{11-x^2-y^2-4x-2y-6}) = 0, \\ \frac{1}{2} + 2 \sin \frac{\pi x}{12} \cos \frac{\pi y}{6} = 2 \cos \frac{\pi x}{12} \sin \frac{\pi y}{6} + \\ + \sin^2 \frac{\pi x}{8}. \end{cases}$$

Вариант 6

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$3 \sin x - 2 \operatorname{ctg} x = 0.$$

2. На диаметре MN окружности отмечена точка R и через нее проведена хорда PQ . Известно, что углы MNP и NPR равны соответственно 60° и 13° , а длина PR равна 3. Найдите диаметр окружности.

3. Решите уравнение

$$5 \cdot 4^x - 11 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0.$$

4. Два вида корма для животных — А и Б — отличаются весовым содержанием белков, жиров и углеводов. В корме А белков в $\frac{5}{3}$ раз больше, а углеводов в 1,5 раза меньше по весу, чем жиров. В корме Б соответственно белков и углеводов в $\frac{7}{2}$ раз меньше, чем жиров. Можно ли за счет смешивания кормов А и Б приготовить корм, в котором белков в 1,5 раза, а углеводов в 5 раз больше, чем жиров?

5. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} x^2 + 2px + 4p^2 - 5p + 3 \geq 4 \sin y - 3 \cos y, \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}$ имеет единственное решение?

Вариант 7

(географический факультет)

1. Найдите область определения функции

$$y = \log_{-x}(x^2 + x - 2).$$

2. Решите неравенство

$$2^{3x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{2} > 1 + 2^{-3x}.$$

3. Из пункта А в пункт С, находящийся на расстоянии 80 км от А, выехал мотоциклист. Навстречу ему и одновременно с ним из пункта В, находящегося между А и С на расстоянии 5 км от С, выехал велосипедист, а из пункта С — автомобиль. Через какое время встретились мотоциклист и велосипедист, если известно, что это произошло через 20 минут после того, как автомобиль догнал велосипедиста, а мотоциклист до встречи с автомобилем проехал в пути вдвое больше времени, чем велосипедист до того, как его догнал автомобиль?

4. Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается с плоскостью P по четырехугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на ребрах AB и AC . Отношение сторон EF и EH равно 3. Известно, что плоскость P параллельна противоположным ребрам AD и BC , отношение которых равно $\frac{1}{3}$. Найдите отношение, в котором точка E делит ребро AB .

5. Докажите, что при всех $x > 0$ выполняется неравенство

$$x^2 + lx + 4l \cos x > 0.$$

Вариант 8

(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$(x-2)\left(\sqrt{x+3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

2. Найдите все решения неравенства

$$(x^2 + 8x + 15)\sqrt{x+4} \geq 0.$$

3. Решите уравнение

$$(2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x}(18x) + 1) = 0.$$

4. Точка O лежит на отрезке AB , так что $AO = 13$, $OB = 7$. С центром в O проведена окружность радиусом 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M , причем точки касания лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника AMB .

5. Путь из A в B проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км — по грунтовой дороге. Первую часть пути автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую. Автобус совершил более четырех рейсов по маршруту из A в B и обратно. На это, включая стоянки в конечных пунктах, ушло менее одной недели (т. е. менее 168 часов). За время, которое он провел в движении, автобус мог бы проехать 2100 км, если бы двигался со скоростью, равной среднему арифметическому между скоростями движения по шоссе и грунтовой дороге. Найдите скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.

6. Найдите все действительные значения параметра a , при каждом из которых область значений функции

$$y = \frac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1; 2]$.

Вариант 9

(экономический факультет)

1. Какое из чисел больше:

$$\sqrt{4} + \sqrt{2} \text{ или } 3?$$

Ответ обоснуйте.

2.1.*) Решите неравенство

$$x + \sqrt{x^2 + x - 6} > -1.$$

2.2. Решите уравнение

$$2\cos x = 1 - 2\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x.$$

3.1. Решите уравнение

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos 2x.$$

3.2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 + x - 6} + 3x + 13}{x + 5} > 1.$$

4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$\left| y - \frac{1}{2}x^2 \right| + \left| y + \frac{1}{2}x^2 \right| \leq 2 + x.$$

5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что длина отрезка AD равна 3, косинус угла BDC равен $13/20$, а сумма углов ABC и ADB равна π . Найдите периметр треугольника ABC , если длина стороны BC равна 2.

6.1. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$|3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3$$

выполняется для любых значений a .

6.2. Найдите все значения параметра a , при которых любой корень уравнения

$$a(2a - 1)\sin^4 x + 3\cos^4 x - 2a^2 \sin x = 0$$

является корнем уравнения

$$\log_{1/2}(3 \operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3 \operatorname{tg} x + 1) - \log_{1/\sqrt{2}}(5 - \frac{1}{2} - \operatorname{tg} x) = 1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

* Задачи 2.1, 3.1 и 6.1 предлагались на отделении политической экономики, а задачи 2.2, 3.2 и 6.2 — на отделении экономической кибернетики и планирования народного хозяйства.

Вариант 10

(факультет психологии)

1. Найдите все решения уравнения

$$1 + \cos \frac{x}{2} + \cos x = 0.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$8^4(x^2 + 8) = 16^7(x^2 + 2x).$$

3. Найдите все значения x , при которых выполнено неравенство

$$2x - 17 < \sqrt{81 - x^2}.$$

4. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выехали легковой и грузовой автомобили. Они встретились через 4 часа после начала движения, продолжили свой путь, и легковой автомобиль прибыл в пункт B на 6 часов раньше, чем грузовой автомобиль прибыл в пункт A . Сколько часов был в пути грузовой автомобиль?

5. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки A_1 и C_1 , так что $AA_1:AB = 1:2$ и $CC_1:BC = 1:4$. Через точки A_1 , B и C_1 проведена окружность. Через точку A_1 проведена прямая, пересекающая отрезок BC_1 в точке D , а окружность — в точке E . Найдите площадь треугольника A_1C_1E , если $BC_1 = 6$, $BD = 2$, $DE = 4$, а площадь треугольника ABC равна 32.

6. Найдите наибольшее значение величины b , при котором неравенство

$$\sqrt{b^2(8x - x^2 - 16)} + \frac{\sqrt{b}}{8x - x^2 - 16} \geq -\frac{2}{3} b |\cos \pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 11

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Вычислите

$$\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_5 5}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2|x - 2| + 3|y + 1| = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

3. Найдите все решения уравнения

$$2\sin^2 x + \cos 4x = 0,$$

удовлетворяющие условию $|x| < 1$.

4. В параллелограмме $KLMN$ длина стороны KL равна 8. Окружность, касающаяся сторон NK и NM , проходит через точку L и пересекает стороны KL и ML в точках C и D соответственно. Известно, что $KC:LC = 4:5$ и $LD:MD = 8:1$. Найдите длину стороны KN .

5. За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго. Затем второй рабочий увеличил производительность труда на 0,2 детали в минуту и через некоторое целое число минут догнал и обогнал первого, работавшего с постоянной производительностью, на 2 детали. Найдите наибольшее возможное время t .

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. С наклонной плоскости скатывается без трения обруч, в противоположных точках которого (на одном диаметре)

укреплены две одинаковые точечные массы (рис. 1). В начальный момент обруч покоится. С какой скоростью будет двигаться центр обруча в тот момент, когда он пройдет путь l ? Ускорение свободного падения g , масса обруча много меньше точечных масс, угол наклона плоскости к горизонту α . Обруч не деформируется. Влиянием воздуха на движение пренебречь.

2. Из однородной пластинки вырезан прямоугольный треугольник с острым углом 30° . Этот треугольник закреплен в одной точке с помощью оси, проходящей через острый угол (рис. 2). Какую минимальную по величине силу нужно дополнительно приложить к этому треугольнику, чтобы удержать его в положении, изображенном на рисунке сплошными линиями? Масса треугольника M , ускорение свободного падения g .

3. Идеальный газ совершает работу, изменяя свое состояние по замкнутому циклу, состоящему из двух изохор и двух изобар (рис. 3). В начальном состоянии, изображаемом точкой 1, температура газа T_1 ; в состоянии, изображаемом точкой 2, температура газа T_2 ; такая же температура в состоянии, изображаемом точкой 4. Масса газа m , молярная масса M . Какую работу совершает газ за один цикл?

4. В сосуд объемом $V=10$ дм³ поставили блюдце, содержащее $m=1$ г воды. После этого сосуд герметически закрыли и оставили при температуре $t=20$ °С, при которой давление насыщенного пара воды $p=2,33$ кПа. Какая часть воды испарится? Объемом блюдца пренебречь, $R=8,31$ Дж/(моль · К), $M_p=0,018$ кг/моль.

5. Две металлические пластины А и В находятся на расстоянии $d=10$ мм друг от друга. Между ними на расстоянии $d_1=2$ мм от пластины А находится металлическая пластина С толщиной $h=2$ мм (рис. 4). Найдите потенциал этой пластины, если потенциалы пластин А и В равны, соответственно, $\varphi_A=50$ В и $\varphi_B=-60$ В. Поле между пластинами считать однородным.

6. На сколько изменится заряд на пластинах конденсатора в схеме, изображенной на рисунке 5, если между точками А и В вклю-

чить резистор сопротивлением R ? ЭДС источника, емкость конденсатора и сопротивления резисторов, изображенных на схеме, известны. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

7. Квадратная рамка с током может вращаться вокруг горизонтальной оси OO_1 (рис. 6). Рамка связана с пружиной. При повороте рамки на угол α от исходного горизонтального положения на рамку действует момент упругих сил, пропорциональный углу α . Рамка находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Если по рамке идет ток $I_1=0,1$ А, то рамка устанавливается в положении, в котором $\alpha_1=30^\circ$. При каком токе угол отклонения будет равен $\alpha_2=90^\circ$?

8. Узкий пучок света падает на горизонтальную водную поверхность под углом α (рис. 7). Под каким минимальным углом к поверхности воды нужно установить в воде зеркало, чтобы лучи, отразившись от него, не могли выйти из воды в воздух? Показатель преломления воды n .

9. На плоскую поверхность половинки стеклянного шара нормально к поверхности падает луч света (рис. 8). Расстояние между лучом и осью OO_1 равно a . На каком расстоянии от плоской поверхности этот луч, преломившись на сферической поверхности, пересечет ось OO_1 ? Показатель преломления стекла n , радиус шара R , $a < R/n$.

10. С помощью тонкой линзы получается увеличенное в два раза действительное изображение плоского предмета. Если предмет сместить на $l=1$ см в сторону линзы, то изображение будет увеличенным в три раза. Чему равно фокусное расстояние линзы?

Химический факультет

1. Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с наклонной плоскости высотой H и ударяется о стенку, перпендикулярную наклонной плоскости (рис. 9). После этого тело поднимается по наклонной плоскости на высоту $h=H/2$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=45^\circ$. Считая удар абсолютно упругим, определите коэффициент трения между телом и плоскостью. После удара тело движется поступательно.

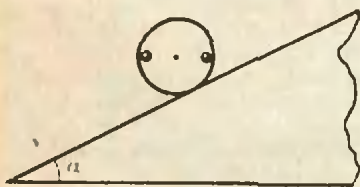


Рис. 1.

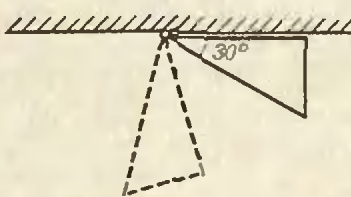


Рис. 2.

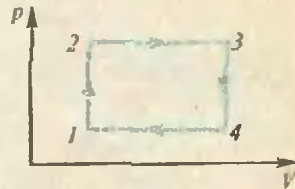


Рис. 3.

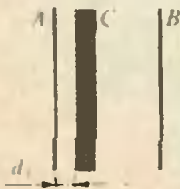


Рис. 4.

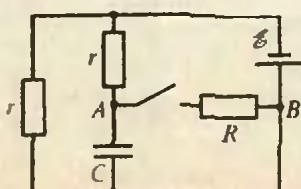


Рис. 5.

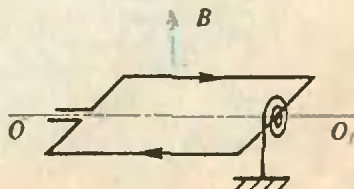


Рис. 6.

2. Однородный шарик массой $m=60$ г лежит на дне пустого стакана. В стакан наливают жидкость так, что объем погруженной в жидкость части шарика оказывается в $k=6$ раз меньше его общего объема. Плотность жидкости в $l=3$ раза больше плотности материала шарика. Найдите силу давления шарика на дно стакана. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

3. Кислород массой $m=3,2$ кг находится в вертикальном цилиндре под поршнем при температуре $t_1=22$ °С. После сообщения кислорода количества теплоты $Q=9 \cdot 10^3$ Дж его температура стала $t_2=27$ °С. Определите, какое количество теплоты пошло на увеличение внутренней энергии кислорода. Молярная масса кислорода $M=32$ кг/кмоль, универсальная газовая постоянная $R=8,31 \times 10^3$ Дж/(кмоль · К). Трение между стенками цилиндра и поршнем отсутствует. Изменением плотности кислорода в сосуде по высоте пренебречь.

4. Шарик массой $m=2$ г, несущий электрический заряд $Q=10,5 \cdot 10^{-9}$ Кл, может вращаться в вертикальной плоскости на непроводящей, невесомой и нерастяжимой нити длиной $l=50$ см. В центре вращения закреплен второй шарик с таким же зарядом. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарiku в нижнем положении, чтобы он мог сделать полный оборот? Ускорение свободного падения $g=10$ м/с², электрическая постоянная $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Размерами шариков по сравнению с длиной нити пренебречь.

5. Амперметр, включенный в участок цепи, изображенный на рисунке 10, показывает силу тока $I_1=0,5$ А. Найдите силу тока через резистор R_1 . Сопротивления резисторов: $R_1=R_2=2$ Ом, $R_3=4$ Ом, $R_4=R_5=1$ Ом. Сопротивлением амперметра пренебречь.

Факультет почвоведения и географический факультет

1. Невесомый стержень вращается вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню. По равные стороны от оси на расстояниях $l_1=1$ м и $l_2=2$ м от нее на стержне закреплены грузы. Их массы $m_1=1$ кг и $m_2=$

$=2$ кг соответственно. Стержень, первоначально расположенный горизонтально, отпускают без толчка. Найдите скорости грузов в тот момент, когда стержень проходит вертикальное положение. Трение отсутствует. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

2. В цилиндрический сосуд, лежащий на боку на горизонтальной поверхности, начинают медленно двигать с открытого конца гладкий поршень. Найдите давление воздуха в сосуде в тот момент, когда сосуд сдвинется с места. Масса сосуда вместе с поршнем $m=2$ кг. Площадь поршня $S=6$ см². Атмосферное давление $p_0=100$ кПа. Коэффициент трения между горизонтальной поверхностью и сосудом $\mu=0,3$.

3. Два одинаковых шарика массой $m=0,09$ кг каждый заряжены одинаковыми электрическими зарядами и подвешены при помощи непроводящих невесомых нитей к потолку, как показано на рисунке 11. Какой заряд q должен иметь каждый шарик, чтобы обе нити испытывали одинаковое натяжение? Длины нитей значительно больше размеров шариков. Взаимодействием шариков с потолком пренебречь. Расстояние между шариками $l=0,3$ м, электрическая постоянная $\epsilon_0=8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м, ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

4. Два одинаковых вольтметра, соединенных последовательно, при подключении к источнику тока показывают напряжение $U_1=4,5$ В каждый. Один вольтметр, подключенный к тому же источнику, показывает напряжение $U_2=8$ В. Чему равна ЭДС источника?

5. Световод представляет собой сплошной цилиндр из прозрачного материала, показатель преломления которого относительно воздуха $n=1,28$. Луч света падает из воздуха на центр входного торца световода под углом β (рис. 12). Определите максимальное значение угла β , при котором луч будет идти внутри световода, не выходя за его пределы.

Геологический факультет

1. Спутник движется по орбите так, что все время находится над одной и той же точкой экватора на одной и той же высоте. Каково

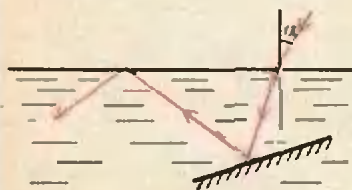


Рис. 7.

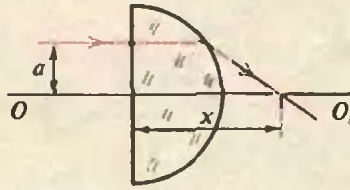


Рис. 8.

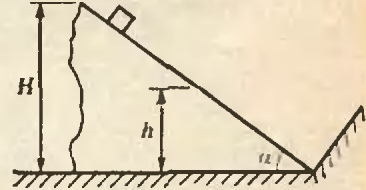


Рис. 9.

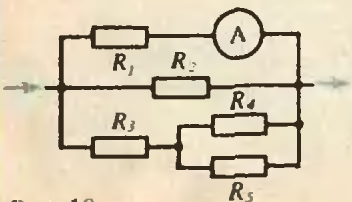


Рис. 10.



Рис. 11.

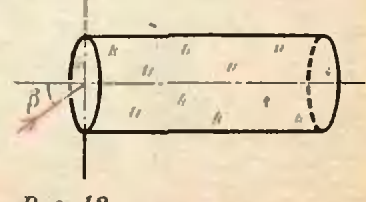


Рис. 12.

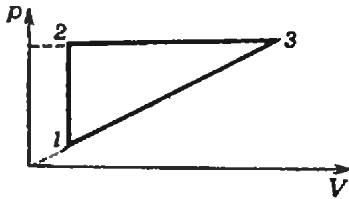


Рис. 13.

расстояние такого спутника до центра Земли? Масса Земли $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н \cdot м²/кг².

2. Разность длин двух математических маятников, расположенных в одном и том же месте Земли, составляет $\Delta l = 0,75$ м. Определите длины этих маятников, если отношение их периодов колебаний $T_1/T_2 = 0,5$.

3. Вычислите работу, которую совершает газ при нагревании от температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$, если он находится в вертикальном цилиндре, закрытом гладким подвижным поршнем, площадь которого $S = 20$ см², а масса $M = 5$ кг. Начальный объем газа $V_0 = 5$ л, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

4. Три точечных заряда $q_1 = 1 \cdot 10^{-6}$ Кл, $q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл и $q_3 = 9 \cdot 10^{-6}$ Кл находятся на трех взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в одной точке А. Расстояния от зарядов до точки А равны, соответственно, $a_1 = 1$ см, $a_2 = 2$ см и $a_3 = 3$ см. Найдите модуль напряженности электрического поля в точке А. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м.

5. В некоторой среде распространяется волна. За время, в течение которого частица среды совершает $n = 140$ колебаний, волна распространяется на расстояние $l = 110$ м. Найдите длину волны.

Механико-математический факультет

1. Подъемный кран опускает бетонную плиту с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. Когда плита находилась на расстоянии $h = 4$ м от поверхности земли, с нее упал небольшой камень. Каков промежуток времени между моментами, в которые камень и плита достигли земли? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², толщиной плиты по сравнению с h пренебречь.

2. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Его приводят в движение так, что он обращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, которая находится на расстоянии $l/2$ от точки подвеса. Какую работу нужно совершить для сообщения шарiku такого движения?

3. В двух сосудах налиты одинаковые объемы различных жидкостей. Если брусок из пластмассы поместить в первый сосуд, то он плавает в нем, причем сторона бруска, имеющая длину a , перпендикулярна поверхности жидкости, а высота выступающей части равна h_1 . Если этот брусок поместить во второй сосуд, то высота выступающей части станет h_2 . Какой будет величина выступающей части, если обе жидкости слить в один сосуд? Считать, что жидкости смешиваются без изменения суммарного объема.

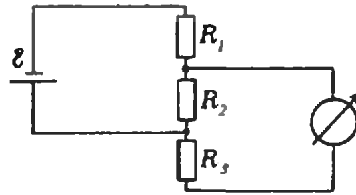


Рис. 14.

4. На рисунке 13 показан цикл, совершаемый над идеальным газом, причем 1—2 — изохорный, 2—3 — изобарный процессы. Температуры газа в точках 1 и 3 равны соответственно $T_1 = 300$ К и $T_3 = 400$ К. Найдите температуру газа в точке 2. Масса газа постоянна.

5. Толстостенный сосуд массой $m = 1$ кг изготовлен из материала, удельная теплоемкость которого $c = 100$ Дж/(кг \cdot К). Сосуд содержит два моля одноатомного газа, объем которого $V = 500$ см³ остается неизменным. Состояние сообщают количество теплоты $Q = 300$ Дж. Найдите изменение давления газа. Универсальную газовую постоянную принять равной $R = 8 \frac{1}{3}$ Дж/(моль \cdot К).

6. Высота поднятия жидкости в капиллярной трубке $h_1 = 33$ мм. Плотность жидкости $\rho = 13 \cdot 10^3$ кг/м³. Высота поднятия в такой же трубке, но запаянной на конце, $h = 13$ мм. Длина трубки $l = 513$ мм, длиной погруженной части можно пренебречь. Найдите атмосферное давление.

7. В схеме, показанной на рисунке 14, источник тока и амперметр поменяли местами. Какие токи покажет амперметр в этих двух случаях? $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 60$ Ом, $\mathcal{E} = 10$ В, внутренним сопротивлением источника тока и амперметра пренебречь.

8. Конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ заряжается постоянным током через резистор сопротивлением $R = 100$ кОм. Через какое время после начала зарядки энергия, запасенная в конденсаторе, станет равной энергии, выделенной в резисторе?

9. Из куска однородной проволоки длиной l и сопротивлением R спаяна фигура в виде кольца с хордой АС, равной диаметру кольца (рис. 15). Кольцо помещают в однородное магнитное поле, вектор индукции которого \vec{B} перпендикулярен плоскости кольца. Модуль этого вектора меняется со временем по закону $B = kt$. Найдите выделяемую в проволоке мощность.

10. Перемещая линзу между экраном и предметом, удается получить два его четких изображения — одно размером $l_1 = 2$ см, а другое — $l_2 = 8$ см. Каков размер предмета?

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Вокруг планеты, имеющей форму шара радиусом r , по круговой орбите движется спутник. Определите радиус орбиты спутника, считая известными ускорение свободного падения у поверхности планеты g и период обращения спутника T .

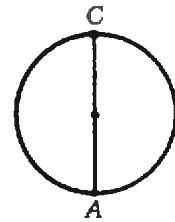


Рис. 15.

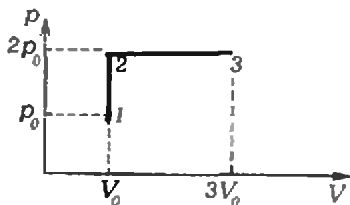


Рис. 16.

2. К коромыслу равноплечных весов подвешены два сплошных однородных шарика равной массы, сделанных из разных материалов. Если одновременно поместить один из шариков в жидкость плотностью $\rho_1 = 10^4 \text{ кг/м}^3$, а другой — в жидкость плотностью $\rho_2 = 0,8 \times 10^4 \text{ кг/м}^3$, то равновесие сохранится. Считая, что плотности шариков больше плотностей жидкостей, найдите отношение плотностей шариков.

3. В теплоизолированном сосуде в начальный момент находится одноатомный газ при температуре $T_0 = 300 \text{ К}$ и кусочек железа массой $m = 0,2 \text{ кг}$, нагретый до температуры $T = 500 \text{ К}$. Начальное давление газа $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, его объем $V_0 = 1000 \text{ см}^3$, удельная теплоемкость железа $c = 0,45 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$. Найдите давление газа в равновесном состоянии, считая его объем неизменным.

4. Найдите количество теплоты, которое получает одноатомный идеальный газ в процессе 1—2—3 (рис. 16). В состоянии 1 давление газа $p_1 = 10^5 \text{ Па}$ и объем $V_1 = 100 \text{ л}$.

5. В сосуде объемом $V = 1 \text{ м}^3$ при температуре $t = 20^\circ \text{С}$ находится воздух с относительной влажностью $\varphi = 30\%$. Найдите относительную влажность после добавления в сосуд $m = 5 \text{ г}$ воды и полного ее испарения. Температура поддерживается постоянной. Давление насыщенного водяного пара при температуре 20°С равно $p_{\text{н}} = 2,3 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

6. До замыкания ключа K конденсаторы с емкостями $C_1 = 1 \text{ мкФ}$ и $C_2 = 2 \text{ мкФ}$ были

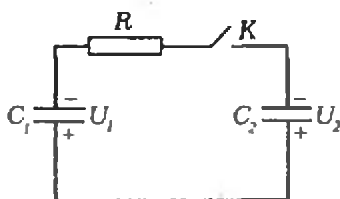


Рис. 17.

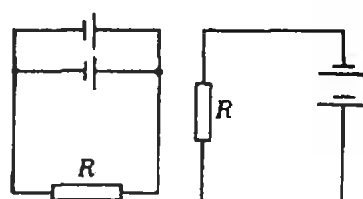


Рис. 18.

заряжены до напряжений $U_1 = 400 \text{ В}$ и $U_2 = 100 \text{ В}$, как показано на рисунке 17. Какая энергия выделится на резисторе R после замыкания ключа?

7. Батарея из двух одинаковых параллельно соединенных элементов с внутренним сопротивлением $r = 1 \text{ Ом}$ нагружена на внешнее сопротивление $R = 1 \text{ Ом}$. Во сколько раз изменится отношение мощности, выделяемой во внешнем сопротивлении, к полной мощности, если элементы соединить последовательно (рис. 18)?

8. Линия электропередачи, имеющая сопротивление $R = 250 \text{ Ом}$, подключена к генератору постоянного тока мощностью $P = 25 \text{ кВт}$. При каком напряжении на зажимах генератора потери в линии составят $\eta = 4\%$ от мощности генератора?

9. Широкий световой пучок падает на основание стеклянного полушара с показателем преломления $n = 1,41$ перпендикулярно к плоскости основания. Каков максимальный угол отклонения прошедших через полушар лучей от их первоначального направления?

10. На какой максимальный угол может отклониться луч света, падающий параллельно оптической оси на линзу с фокусным расстоянием $F = 50 \text{ см}$ и диаметром $a = 10 \text{ см}$?

Публикацию подготовили А. Н. Боголюбов, С. С. Крогов, В. И. Родин, А. А. Сапоженко, И. Н. Сергеев, А. Н. Соколович, С. С. Чесноков

Нам пишут

П. Вольфбейн из Киева сообщает следующую теорему:

Если натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) удовлетворяют соотношению $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = pa_1 a_2 \dots a_n$, то они попарно взаимно просты.

Можно считать, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(x) = x^2 - px + q$, где $p = pa_1 a_2 \dots a_n$, $q = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$. По условию, $f(a_1) = 0$. Кроме того

$a_1^2 + q = 2a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq pa_1^2$ и $pa_2 = pa_1 a_2 \dots a_n$. Значит $f(a_2) = a_2^2 - pa_2 + q \leq 0$, причем равенство достигается лишь при $a_2 = a_1 = \dots = a_n = 1$.

Если не все $a_i = 1$, то $f(a_n) < 0$. Значит a_1 — больший корень $f(x)$; обозначим через a'_1 меньший корень. Из теоремы Виета следует, что a'_1 — натуральное число и числа a'_1, a_2, \dots, a_n тоже удовлетворяют исходному соотношению. Итак, по данному набору a_1, a_2, \dots, a_n мы можем изготовить новый набор a'_1, a_2, \dots, a_n с меньшей суммой.

Продолжая эту процедуру, мы придем к набору из одних единиц. Если в исходном наборе были пары не взаимно простых чисел, то такие пары будут присутствовать и в новых наборах (это тоже следует из формулы Виета: $a'_1 = pa_2 \dots a_n - a_1$). Но в наборе из одних единиц таких пар нет, что и доказывает взаимную простоту чисел исходного набора.

**Ответы,
указания,
решения**

Задачка развлечение

Воспользуемся формулой для n -го числа Фибоначчи, приведенной в «Калейдоскопе «Кванта» в № 3 за 1988 год:

$$u_n = (\tau^{n+1} - \tau^{-(n+1)}) / \sqrt{5}, \text{ где } \tau = (\sqrt{5} + 1) / 2.$$

Поскольку $|\tau| > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^{-n} = 0$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0 \tau^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 \tau)^{n+1} / \sqrt{5}$.

Значение предела зависит от величины $y = x_0 \tau$:
если $y < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$; если $y = 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$;
если $y > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Тригонометрические преобразования

- 60° .
- Указания. а) Примените поворот вокруг точки C на 90° . б) Установите, что середины сторон четырехугольника, диагонали которого равны и перпендикулярны, являются вершинами квадрата.
- $T_1 = RO_1A$, где O_1 — вершина треугольника OO_1A , в котором $OO_1 = O_1A$, $OA = a$, и если $a < 180^\circ$, то $\angle OO_1A = a$ и треугольник OO_1A положительно ориентирован, а если $a > 180^\circ$, то $\angle OO_1A = 180^\circ - a$ и треугольник OO_1A отрицательно ориентирован (если $a = 180^\circ$, то O_1 — середина отрезка OA).

Задача

1. Стержни 1, 2, 4, 7 (нижний) растянуты; стержни 3, 5 (верхний левый), 6 (верхний правый) сжаты; натяжения стержней равны соответственно

$$T_1 = \sqrt{3} Mg/2, T_2 = T_3 = T_4 = Mg/(2\sqrt{3}),$$

$$T_5 = \sqrt{3} Mg/4, T_6 = Mg/(4\sqrt{3}),$$

$$T_7 = Mg/2.$$

2. $T = (M_1 + M_2)g/4$.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

- $n\pi, \pi/4 + n\pi; n \in \mathbb{Z}$.
- $(0; 1/4) \cup (1; 5/4)$.
- $7/(\operatorname{ctg} 20^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ)$. Указание. Опустите перпендикуляр из центра окружности на сторону PQ и выразите длину отрезка PQ через искомый радиус.
- $\arccos 5/8$. Решение. Пусть $\vec{CF} = \vec{a}, \vec{FE} = \vec{b}, \vec{EA} = \vec{c}, \vec{CA} = \vec{x}, \vec{CB} = \vec{y}$ и, для определенности, угол между векторами \vec{a} и \vec{c} равен $\arccos \sqrt{35}/10$. Тогда имеем $\vec{ac} = 7/2, \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{y} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \vec{x}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{ac} = 32; \vec{y}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{ac} = 18, \vec{x}\vec{y} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \vec{c}^2 = 15,$
 $\cos \angle ACB = \frac{\vec{x}\vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{5}{8}$.

5. 0,9 мин. Указание. Пусть первый мото-

циклист проходил x кругов в минуту, а второй — y . По условию

$$\frac{14}{x} + \frac{16}{4x} = \frac{12}{y} + \frac{18}{2y} + \frac{0,5}{x},$$

откуда $x = \frac{5}{6}y < y$. Итак, первым финишировал второй мотоциклист, причем

$$5 < y < \frac{30}{4}, 4(y-x) = \frac{2y}{3}, \text{ т. е. } 2y/3 - \text{целое}$$

число. Поэтому $y = 6, x = 5$, а искомая разница равна

$$\frac{29,5}{x} - \frac{30}{y} = 5,9 - 5 = 0,9.$$

6. $[-2\pi; 0) \cup (2\pi; 4\pi]$. Решение. Пусть $u = \sin x \cos y, v = -\cos x \sin y$. Перемножив первые два уравнения, получим, учитывая третье уравнение, $uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$, откуда $u = v$. По-

этому $\sin(x+y) = 0$ и $x+y = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, но так как $0 \leq y \leq \pi/2$, из первого уравнения следует, что $\sin x > 0$ и $n = 2m+1, m \in \mathbb{Z}$. Далее, из $z > 0$ и первого и третьего уравнений получаем $\sin x = \sin y = \frac{1}{z}, \cos y = -\cos x = \frac{x+y}{a-\pi}$. Итак, нужно найти все значения a ,

при которых система

$$\begin{cases} \cos y = \frac{x+y}{a-\pi}, \\ x = \pi(2m+1) - y, m \in \mathbb{Z}, \\ 0 < y \leq \pi/2 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы неравенства $0 \leq \frac{\pi(2m+1)}{a-\pi} < 1$ выполнялись при единст-

венном целом m . При $a > \pi$ получаем условие $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{a}{2\pi} - 1 \leq 1$, т. е. $2\pi < a \leq 4\pi$. Аналогично, при $a < \pi$, получим $-2\pi \leq a < 0$.

Вариант 2

- 50.
- $\frac{\pi}{6}(2k+1), (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
40. Указание. Если c — гипотенуза треугольника ABC , h — его высота, то $h^2 = 100 - \frac{c^2}{4}, h = c \cos 75^\circ \sin 75^\circ = \frac{c}{4}$.
- $\left[\frac{3 + \log_2 2}{2 + 3 \log_2 2}; \frac{1 - \log_2 2}{2 - 3 \log_2 2} \right]$.
- $a = 3/2; a = 5/3; 2 \leq a < 4$. Указание. Левая часть имеет смысл при $\frac{3}{2} \leq a < 4$. Если $\lg \frac{36a - 9a^2}{35} = 0$, т. е. при $a = 7/3$ и $a = 5/3$.

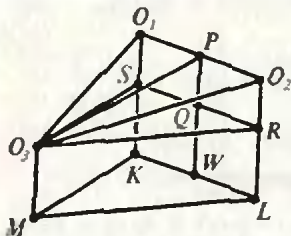


Рис. 1.

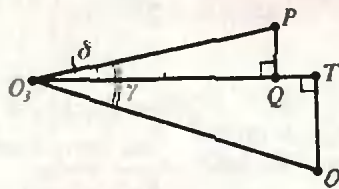


Рис. 2.

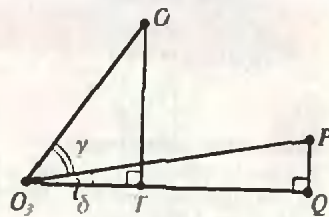


Рис. 3.

уравнению удовлетворяют все значения x . В противном случае получаем уравнение

$$f(x) = (2 \lg a)x^2 + (2 \lg a - 2\sqrt{22a - 4a^2 - 2a})x - a\sqrt{22a - 4a^2 - 2a} = 0.$$

Чтобы его корни были расположены требуемым образом, необходимо и достаточно выполнение условий $f(0) \leq 0, f(-1) \leq 0$.

6. $(2 + 12\sqrt{11})/5$. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры равных шаров радиуса r_1 , а O_3 — центр меньшего шара радиуса r , K, L, M — точки касания шаров с плоскостью α , W — основание перпендикуляра, опущенного из точки касания P шаров радиуса r_1 (рис. 1). Через O_3M проведем плоскость, перпендикулярную O_1O_2 , и опустим перпендикуляр O_3Q на PW . Тогда $PQ = r_1 - r, O_3P = \sqrt{r^2 + 2rr_1}, \frac{r_1 - r}{\sqrt{r^2 + 2rr_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, откуда $r_1 = 2r$. Пусть

R — радиус сферы. Тогда $OO_1 = R - 2r$, но $r = R - 15$. Поэтому $OO_1 = 30 - R$. Применяя теорему косинусов к треугольнику O_1OO_3 , получим $R = 18, r = 3, r_1 = 6$. Далее, точка O лежит в плоскости O_3PW , причем $O_3P = 6, OP = \sqrt{OO_3^2 - PO_3^2} = \sqrt{108}$. Поэтому $\cos \angle OO_3P = 9/5\sqrt{5}$. Возможны два случая расположения точки O относительно прямой O_3Q (рис. 2 и 3). В первом случае расстояние от точки O до прямой O_3Q равно

$$OT = OO_3 \sin(\gamma - \delta) = \frac{12\sqrt{11} - 27}{5} < 3, \text{ и, по-}$$

скольку искомое расстояние равно $OT - 3$, этот случай невозможен.

Во втором случае искомое расстояние равно $OT + 3 = OO_3 \sin(\gamma + \delta) + 3 > 14$.

Вариант 3

1. $(-1)^n \arcsin(2 - \sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2. $R \sin 2\alpha$.

3. $\{-1\}$.

4. $2 \arctg(5 \operatorname{tg} \alpha)$. Указание. Пусть $DM = 2a,$

$$MC = a. \text{ По теореме синусов } \frac{AM}{\sin\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)} =$$

$$= \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{AM}{\sin(\pi - A)} = \frac{2a}{\sin \frac{A}{2}},$$

откуда $\operatorname{tg}(A/2) = 5 \operatorname{tg} \alpha$.

5. 1; $-1/2$; $(-7 \pm 4\sqrt{2})/2$. Указание. Умножив второе уравнение на a и вычитая первое уравнение, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x(1-a) - y(2a+1) - a + \frac{3}{2} = 0, \\ xy + x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

При $a = 1$ и $a = -1/2$ эта система имеет единственное решение. При остальных a система сводится к квадратному уравнению, для которого условием единственности является равенство нулю дискриминанта.

6. $1/3; 2/3$. Решение. Так как боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, высота пирамиды является осью цилиндра и проходит через центр окружности, описанной в основании пирамиды (радиус этой окружности находится из треугольника ABC и равен 1). Верхнее основание цилиндра вписано в треугольник DEF (рис. 4), лежащий в плоскости, отсекающей от исходной пирамиды подобную ей пирамиду $SDEF$. Обозначим через m коэффициент подобия. Тогда радиус основания цилиндра $r = m$. В треугольнике $CSO_2:CO_2 = \sqrt{2}, DO_1 = \sqrt{2}m, CG = \sqrt{2}(1-m), CD = \sqrt{38}(1-m)$. Далее, $DG = \sqrt{CD^2 - CG^2} = 6(1-m)$, поэтому $S_{\text{бок.}} = 2\pi \cdot DG = 2\pi m \times 6(1-m) = \frac{8\pi}{3}$ (по условию), откуда $m_1 = \frac{1}{3},$

$m_2 = \frac{2}{3}$. Итак, существуют 2 цилиндра с данной площадью боковой поверхности.

Вариант 4

1. 3.

2. $-\pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. $(1/2; 1/2)$

4. 9. Указание. Выразите через $x = AC$ все отрезки касательных к окружности и запишите теорему косинусов для треугольника ABC .

5. 2; 3. Решение. При $a = 3$ системы несовместимы. При $a \neq 3$ первая система имеет единственное решение, если же вторая система имеет единственное решение, то $y = 0$ (так как в обе уравнения y входит в четных степенях). Поэтому системы могут быть равносильными

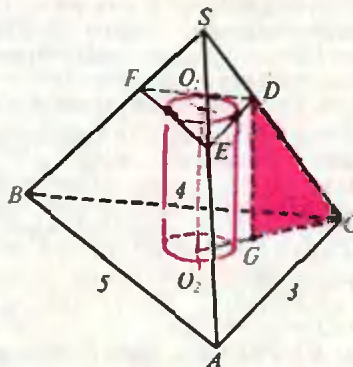


Рис. 4.

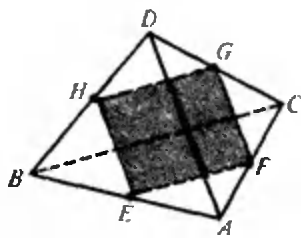


Рис. 5.

только при условии

$$\begin{cases} ax = 6a - 4, \\ x = 2a, \end{cases}$$

т. е. при $a = 2$, $a - 1 = 0$. При $a \neq 2$, решение (4; 0) первой системы является единственным решением второй системы, приводящейся к виду

$$\begin{cases} x - 2 = x - 4 = 2a', \\ x - 4 + y^2 = 0, \end{cases}$$

При $a = 1$, вторая система имеет по меньшей мере два решения: (2; 0) и (4; 0).

Вариант 5

1. $2\sqrt{3}$.
2. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.
3. 6 ч.

4. 90° и 30° . **Решение.** Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, тогда $bc = 4 \cdot 2 = \sqrt{3}$ и $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Если D — точка касания окружности со стороной AC , то $AD = \sqrt{3} \cdot \text{ctg } 60^\circ = 1$, $c + 1 = AB + AD = BC + CD = a + b - 1$. Отсюда $a^2 = b - c^2 + bc = (2 - a^2) + 4 \cdot 2 = \sqrt{3}$. Следовательно, $a = 3 - \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3} - 2$, $c = \sqrt{3} - 1$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$.

5. $(-2; -1)$. **Решение.** Поскольку

$$\sqrt{11 - x^2 - y^2} - 4x - 2y - 6 = \sqrt{16 - (x+2)^2 - (y+1)^2} - 6 \leq 4 - 6 < 0,$$

исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 16, \\ \sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{4} + \sin \frac{\pi(x-2y)}{12} = 0, \\ \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{4} + 2 \sin \frac{\pi(x-2y)}{12} = 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 16, \\ \cos \frac{\pi x}{4} = 0, \\ \sin \frac{\pi(x-2y)}{12} = 0, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $(-2; -1)$.

Вариант 6

1. $\frac{1}{3} \arccos \frac{\sqrt{10}-1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. $4\sqrt{3} \sin 73^\circ$. **Указание.** Воспользуйтесь теоремой синусов для треугольника NPQ .

3. $\log_2 32; -\log_2 310$. **Указание.** Разложите левую часть уравнения на множители, поделив ее предварительно на $9'$.

4. Нет. **Указание.** В обоих видах кормов белков не меньше, чем углеводов, это свойство сохраняется при смешивании.

5. $-1/3$; 2. **Решение.** Система приводится к виду

$$\begin{cases} x + p^2 + 3p^2 - 5p + 3 \geq 5 \sin y - \arctg 3, \\ 0 \leq y \leq 2\pi. \end{cases}$$

Для выполнения требования задачи необходимо и достаточно, чтобы наименьшее значение $3p^2 - 5p + 3$ левой части первого неравенства совпадало с наибольшим значением 5 его правой части на отрезке $[0; 2\pi]$, т. е. чтобы выполнялось равенство $3p^2 - 5p - 2 = 0$.

Вариант 7

1. $-\infty; -2$.

2. $1/6; \infty$.

3. $5/8$ ч. **Решение.** Обозначив через x, y, z скорости мотоциклиста, велосипедиста, автомобиля, а через t — искомое время, получим систему

$$\begin{cases} tx + y = 75, \\ t - 1/3 \cdot yz = 5, \\ 2t - 1/3 \cdot (x + z) = 80, \end{cases}$$

откуда $(t - 1/3)(x + y) = 35 = \frac{7}{15} t(x + y)$, т. е.

$$t = 5/8.$$

4. 1. **Решение.** Пусть $x = \frac{EA}{EB}$, тогда из подобия треугольников EHN и ABD , а также $\triangle EF$ и $\triangle ABC$ (ибо $EH \parallel AD$, $EF \parallel BC$) (рис. 5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot 3 &= \frac{AD}{BC} \cdot \frac{EF}{HE} = \frac{AD}{HE} \cdot \frac{EF}{BC} = \\ &= \frac{AE + EB}{EB} \cdot \frac{AE}{AE + EB} = (x + 1) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = x. \end{aligned}$$

5. **Решение.** При $x \in [0, \pi/2]$ первые два слагаемых левой части неравенства положительны, а третье неотрицательно. При $x \in [\pi; \infty)$ имеем $x^2 + \pi k + 4\pi \cos x \geq \pi^2 + \pi^2 - 4\pi = 2\pi\pi - 2 > 0$,

а при $x \in (\pi/2; \pi)$, воспользовавшись неравенством $\sin y < y$, где $y = x - \pi/2$ получаем

$$\begin{aligned} x^2 + \pi x + 4\pi \cos x &= x^2 + \pi k - \\ &- 4\pi \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right) > x^2 + \pi x - \\ &- 4\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = x^2 - 3\pi x + 2\pi^2 = \\ &= (x - \pi)(x - 2\pi) > 0. \end{aligned}$$

Вариант 8

1. $[2]$. **Указание:** $\sqrt{3} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$.

2. $(-4) \cup [-3; +\infty)$.

3. $[1/6; 2]$.

4. $9(6 - \sqrt{6})/30$. **Указание.** По теореме синусов $R = AB/2 \sin \angle AMB$.

5. 40 км/ч, 30 км/ч. **Указание.** Пусть v — число рейсов, v_1 и v_2 — скорости движения соответственно по шоссе и грунтовой дороге. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{120}{v} - \frac{80}{v_1} &= 2, \\ v &> 4. \end{aligned}$$

$$2v \left(\frac{80}{v_1} + \frac{120}{v_2} \right) = \frac{4200}{v_1 + v_2}$$

$$2n\left(\frac{80}{v_1} + \frac{120}{v_2}\right) < 168.$$

Поскольку $\frac{80}{v_1} + \frac{120}{v_2} > 2$, получаем $4n < 168$, т. е. $n < 42$.

Пусть $v_1 = 10x$, $v_2 = 10y$. Выразив y через x из первого уравнения, после подстановки во второе уравнение получим

$$nx^2 - (105 - 18n)x + 80n - 420 = 0.$$

Условие разрешимости дает

$$n \leq 105 \left(\frac{5}{2} - \sqrt{6}\right), \quad n \geq 105 \left(\frac{5}{2} + \sqrt{6}\right),$$

откуда $n = 5$.

6. [1/3; 33/32]. Указание. Выполнив замену $t = \sin x$, $b = 1 - a$, приходим к следующей задаче: при каких значениях b уравнение $f(t) = pt^2 - t - b(p+2) = 0$ при любом $p \in [1, 2]$ имеет хотя бы один корень, удовлетворяющий условиям $|t| \leq 1$, $t^2 \neq b$? Сразу заметим, что условие $t^2 = b$ может выполняться лишь при $b = 0$, но тогда уравнение (*) имеет корень $\frac{1}{p}$. Уравнение (*) имеет корни при $1 + 4pb(p+2) \geq 0$. Это неравенство выполняется при всех $p \in [1, 2]$, если и только если $b \geq -\frac{1}{32}$. Поскольку абсцисса вершины $t_0 = \frac{1}{2p}$ параболы $y = pt^2 - t - b(p+2)$ принадлежит отрезку $[0; 1]$, необходимым и достаточным условием существования корня уравнения (*), принадлежащего отрезку $[-1; 1]$, является справедливость хотя бы одного из неравенств $f(1) \geq 0$; $f(-1) \geq 0$ при всех $p \in [1; 2]$. Иначе говоря, при всех таких p должно выполняться одно из неравенств $b \leq \frac{p+1}{p+2}$; $b \leq \frac{p-1}{p+2}$, но для этого необходимо и достаточно, чтобы было $b \leq \frac{2}{3}$.

Вариант 9

1. Первое число больше.

2.1. $(-\infty; -7) \cup [2; +\infty)$.

2.2. $x_1 = \frac{2\pi}{9}(3n+2)$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}(3m+2)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

3.1. $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{12}(4n+1)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

3.2. $(-\infty; -7) \cup (-5; -3) \cup [2; +\infty)$.

4. 15/2. Указание. При замене y на $-y$ соотношение не изменяется. Поэтому достаточно нарисовать картинку для $y \geq 0$.

5.11. Указание. Поскольку $\angle DBC = \angle BAC$, треугольники BAC и DBC подобны.

6.1. $a \in [-12/5; 0]$. Указание. Поскольку $y = 3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a = a \sin 2x - \cos 2x + a + 2 = \sqrt{a^2 + 1} \sin(2x - \varphi) + a + 2$,

где $\varphi = \arccos(a/\sqrt{a^2+1})$, должна выполняться система

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+1} + a + 2 \leq 3, \\ -\sqrt{a^2+1} + a + 2 \geq -3. \end{cases}$$

6.2. $a = 1$. Указание. Корни второго урав-

нения $x = \frac{\pi}{4} + \pi l$. Подставляя их в первое урав-

нение, получаем квадратное уравнение относительно a , из которого следует, что либо $a = 1$, либо $a = -3/2$. Осталось подставить полученные значения a в первое уравнение и решить его, пользуясь соотношением $\sin x = \sin x(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Вариант 10

1. $\pi + 2\pi l$, $\pm 4\pi/3 + 4\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

2. $(-2; 4/3; 3)$.

3. $\left[-9; \frac{34 + \sqrt{116}}{5}\right)$.

4. 12 ч.

5. 17/3. Решение. Имеем

$$S_{A_1BC_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} = 4,$$

$$S_{A_1BD} = \frac{1}{6} S_{A_1BC_1} = \frac{4}{3},$$

а из подобия треугольников A_1BD и C_1ED с коэффициентом $ED : BD = 3 : 2$ получаем

$$S_{C_1ED} = \frac{9}{4} S_{A_1BD} = 3,$$

и, наконец,

$$S_{A_1DC_1} = S_{A_1BC_1} - S_{A_1BD} = \frac{8}{3}.$$

$$S_{A_1C_1E} = S_{A_1DC_1} + S_{EDC_1} = \frac{17}{3}.$$

6. 1/9. Решение. Если неравенство имеет решение, то $b \leq 1/9$. Действительно, либо $b = 0$, либо максимум левой части $-\sqrt{b^2} \left(b(x-4)^2 + \frac{1}{b(x-4)^2} \right)$, равный $-2\sqrt{b^3}$ (ибо $y + \frac{1}{y}$, где $y = b(x-4)^2$), не меньше минимума правой части, равного $-2b/3$, т. е. $-2\sqrt{b^3} \geq -2b/3$, или $9b \leq 1$. Если же $b = 1/9$, то неравенство справедливо, например, при $x = 1$.

Вариант 11

1.2.

2. $(3/2; 0)$, $(3/4; -3/2)$. Указание. Рвзберите четыре случая, которые возникают при раскрытии модулей.

3. $\pm \pi/6$, $\pm \pi/4$.

4. 10. Решение. Пусть A и B — точки касания сторон KN и MN . $KN = x$. Тогда из равенств

$$BM^2 = DM \cdot LM = \frac{x}{9} \cdot \bar{x} = \frac{x^2}{9},$$

$$AK = \sqrt{KC \cdot KL} = \sqrt{\frac{32}{9} \cdot 8} = \frac{16}{3},$$

$$BN = AN = KN - AK = x - \frac{16}{3}$$

имеем $MN = BM + BN = \frac{x}{3} + x - \frac{16}{3} = 8$, откуда $x = 10$.

5. 6,5 ч. Решение. Сначала второй рабочий в течение t минут делал на $3/t$ деталей в минуту меньше первого, а потом в течение

x минут — на $5/x$ деталей в минуту больше первого, причем увеличение его производительности составило $5/x + 3/t = 0,2$, откуда $t =$

$$= \frac{3x}{0,2x - 5} = 15 + \frac{15 \cdot 25}{x - 25} \leq 15 + 15 \cdot 25 = 390$$

(ибо $x \in \mathbb{N}$). С другой стороны, при $x = 26$ все условия задачи реализуются, и $t = 390$.

Физика

Физический факультет

- $v = \sqrt{gl \sin \alpha}$.
- $F = Mg/\sqrt{3}$.
- $A = (m/M)(R/T_1)(T_2 - T_1)^2$.
- $\alpha = M_2 pV / (mRT) = 0,17$.
- $\varphi_C = \varphi_A - (\varphi_A - \varphi_B) d_1 / (d - h) = 22,5^\circ$.
- $\Delta q = C \oint r / (r + R)$.
- $I_2 = I_1 (\alpha_2 / \alpha_1) (\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2) = 0,15$ А.
- В первом случае (рис. 6, а)
 $\varphi_1 = (\arcsin 1/n - \arcsin(\sin \alpha/n))/2$;
во втором случае (рис. 6, б)
 $\varphi_2 = (\arcsin 1/n + \arcsin(\sin \alpha/n))/2$.
- $x = R^2 / (\sqrt{R^2 - a^2} - \sqrt{(R/n)^2 - a^2})$.
- $F = 6l = 6$ см.

Химический факультет

- $\mu = \frac{H-h}{H+h} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \approx 0,33$.
- $F = mg(1 - n/k) = 0,3$ Н.
- $\Delta U = Q - mR(T_2 - T_1) / M = 4845$ Дж.
- $v_{\min} = \sqrt{5gl - Q^2 / (4\pi \epsilon_0 ml)} \approx 5$ м/с.
- $I_4 = I_1 R_1 R_5 / (R_2 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5) = 0,2$ А.

Факультет почвоведения и географический факультет

- $v_1 = l_1 \sqrt{\frac{2g(m_2 l_2 - m_1 l_1)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} \approx 2,58$ м/с;
 $v_2 = v_1 l_2 / l_1 \approx 5,16$ м/с.
- $p = p_0 + \mu mg/S = 110$ кПа.
- $q = \pm l \sqrt{4\pi \epsilon_0 mg} = 3,0 \cdot 10^{-6}$ Кл.
- $\mathcal{E} = U_1 U_2 / (U_2 - U_1) \approx 10,3$ В.
- $\beta_{\max} = \arcsin \sqrt{n^2 - 1} \approx 53^\circ$.

Геологический факультет

- $R = \sqrt[3]{GM_3 T^2 / (4\pi^2)} = 4,2 \cdot 10^7$ м (здесь $T = 24$ ч — период обращения Земли вокруг своей оси).
- $l_2 = \Delta l / (1 - (T_1/T_2)^2) = 1$ м; $l_1 = 0,25$ м.
- $A = (p_0 + Mg/S) V_0 (T_2/T_1 - 1) = 171$ Дж.
- $E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{a_1^4} + \frac{q_2^2}{a_2^4} + \frac{q_3^2}{a_3^4}} \approx 1,6 \cdot 10^8$ В/м.
- $\lambda = l/n = 0,79$ м.

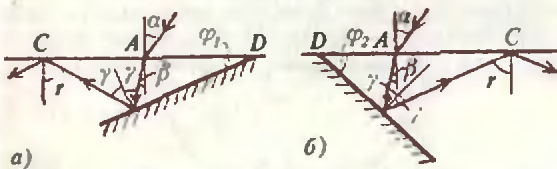


Рис. 6.

Механико-математический факультет

- $\tau = \frac{h}{v} - \frac{v}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}} - 1 \right) = 3,2$ с.
- $A = 5 mgl/4 = 1,2$ Дж.
- $h = \frac{a(h_1 + h_2) - 2h_1 h_2}{2a - (h_1 + h_2)}$.
- $T_2 = \sqrt{T_1 T_3} = 346$ К.
- $\Delta p = \frac{2QvR}{V(3vR + 2mc)} = 8 \cdot 10^4$ Па.
- $p = \rho g(h_1 - h)(l - h)/h = 9,8 \cdot 10^4$ Па.
- $I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{1}{11}$ А.
- $t = 2RC = 20$ с.
- $P = \frac{k^2 \pi^4}{16R(\pi + 1)^3}$.
- $l = \sqrt{l_1 l_2} = 4$ см.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- $R = \sqrt[3]{\frac{gr^2 T^2}{4\pi^2}}$.
- $k = \rho_1 / \rho_2 = 5/4$.
- $p = p_0 \frac{2mCT + 3p_0 V_0}{2mCT_0 + 3p_0 V_0} \approx 1,1 \cdot 10^5$ Па.
- $Q = 11,5 p_0 V_0 = 115$ кДж.
- $\varphi' = \varphi + \frac{mRT}{V p_0 M} \cdot 100\% \approx 60\%$.
- $W = \frac{C_1 C_2 (U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 0,03$ Дж.
- $k = \frac{R+r/2}{R+2r} = 0,5$.
- $U = \sqrt{PR/\eta} = 12,5$ кВ.
- $\delta_{\max} = \pi/2 - \arcsin(1/n) = 45^\circ$.
- $\varphi_{\max} = \arctg\left(\frac{a}{2F}\right) = 0,1$ рад.

Данные школьные задачи

- $\{0, 0\}$ (1, 2). Решение. Так как $1+x+x^2+x^3 = (1+x)(1+x^2)$, то $1+x$ и $1+x^2$ — степени двойки. Пусть $1+x = 2^m$; тогда $1+x^2 = 2^{2m} - 2^{2m+1} + 2$. Если $m > 1$, то последнее выражение при делении на 4 имеет остаток 2 и не является степенью двойки. Поэтому $m = 0$ или 1.
- $x_1 = x_3 = \dots = x_9 = -1$, $x_2 = x_1 = \dots = x_{10} = 1$. Решение. Поделив каждое равенство на следующее (последнее на первое), получим: $x_1 = -x_4 = x_7 = -x_{10} = x_3 = -x_6 = x_9 = -x_2 = x_5 = -x_8$.
- 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, ..., 1, 1, 0, 1. Решение. Ясно, что все наши числа неотрицательны. Занумеруем их подряд против часовой стрелки, начиная с самого большого (с любого из самых больших, если есть несколько одинаковых): $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$. Тогда $a_1 = a_2 - a_3$ или $a_1 = a_3 - a_2$, поэтому одно из чисел a_2, a_3 равно a_1 , а другое — 0. Если $a_2 = a_1$, мы перенумеруем наши числа, начиная с a_2 . Значит, можно считать, что $a_2 = 0$. Теперь находим все остальные числа: $a_{30} =$

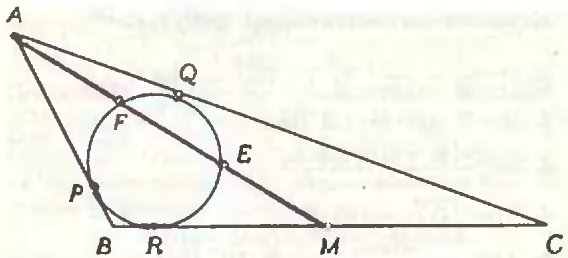


Рис. 7.

$= |a_1 - a_2| = a_1, a_{29} = |a_{30} - a_1| = 0, \dots$ Получается, что наш набор имеет вид $a_1, 0, a_1, a_1, 0, a_1, \dots, a_1, 0, a_1$. Сумма этих чисел равна $20 a_1$, поэтому $a_1 = 1$.

4. Если A_1, A_2, \dots, A_n — эти точки, O — центр круга, то секторы по 60° с радиусами симметрии OA_1, OA_2, \dots, OA_n не должны иметь общих точек, кроме точки O .

5. Если всего мужчин x , то в первом походе женщин было не больше $\frac{2}{3}x$, а во втором — не больше $\frac{1}{3}x$.

6. 5000. Решение е. Заметим, что $p(1) = \frac{1}{2}$ и $p(x) + p(\frac{1}{x}) = 1$ при любом x . В нашей сумме есть некоторое количество (100) слагаемых $p(1)$, а остальные можно сгруппировать в пары $p(x) + p(\frac{1}{x})$. Поэтому сумма равна числу слагаемых, умноженному на $\frac{1}{2}$.

7. Положим $\frac{k(k+1)}{2} = a_k$. Если a_k — квадрат, то $a_{4k+1} + a_{4k} = 4a_k(2k+1)^2$ — тоже квадрат. Поэтому a_1, a_5, a_{25}, \dots — квадраты. (Подумайте, есть ли среди чисел a_k другие квадраты.)

8. 5:10:13. Решение е. Пусть ABC — данный треугольник, AM — медиана (рис. 7). Положим $AF = FE = EM = x, BM = MC = y$. Тогда $AP^2 = AF \cdot AE = ME \cdot MF = 2x^2 = MR^2$. Отсюда $AP = AQ = MR = x\sqrt{2}$. Значит, $AC = AQ + QC = x\sqrt{2} + y + x\sqrt{2} = y + 2x\sqrt{2}$, $AB = AP + PB = x\sqrt{2} + y - x\sqrt{2} = y$, $BC = 2y$. Так как $4AM^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$, то $36x^2 = 2y^2 + 2(y + 2x\sqrt{2})^2 - 4y^2$. Отсюда $x\sqrt{2} = \frac{4}{5}y$. Поэтому $AB:AC:BC = y:2y:\frac{13}{5}y$.

9. Пусть прямые AC и BC пересекают данную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно (рис. 8), и пусть $\angle AMB = 2\alpha$. Тогда $\angle ACB = 180^\circ - \alpha$, и поэтому $\angle AA_1B_1 + \angle BB_1A_1 = \alpha$. Так как $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$ (где O — центр данной окружности), то $\angle AA_1B = 90^\circ - \alpha$. Поэтому $\angle B_1A_1A + \angle AA_1B + \angle BB_1A_1 = 90^\circ$. Следовательно, $\angle B_1A_1A = 90^\circ$, а это означает, что отрезок B_1A_1 — диаметр.

10. Окружность с центром B и радиусом BA без четырех точек: A, C и им диаметрально противоположных, и еще две точки: центр треугольника и точка, симметричная B относительно AC (рис. 9). У к а з а н и е: рассмотрите 9 случаев: 1. $MA = MB = MC$; 2. $MA = MB =$

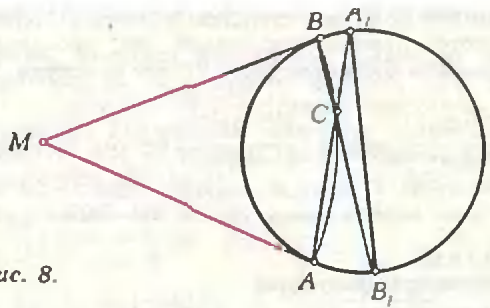


Рис. 8.

BC ; 3. $MA = MB, BC = MC$; 4. $MA = AB, MB = MC$; 5. $MA = AB, MB = BC$; 6. $MA = AB, MC = BC$; 7. $AB = BM = BC$; 8. $AB = BM = MC$; 9. $AB = BM, BC = MC$.

11. Ясно, что при любых положительных x и y справедливо неравенство $(\frac{x}{y})^{x-y} \geq 1$. Поэтому $(\frac{a}{b})^{a-b} (\frac{b}{c})^{b-c} (\frac{c}{a})^{c-a} \geq 1$, что и означает $(a^a b^b c^c)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$.

12. Перепишем неравенство в виде $4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2da) + (a + b + c + d)^2 \geq 0$. Левая часть представляется в виде суммы квадратов: $(a - b + c - d)^2 + 2(a - b)^2 + 2(b - c)^2 + 2(c - d)^2 + 2(d - a)^2$.

13. Пусть h_a, h_b, h_c, h_d — высоты тетраэдра, исходящие из его вершин A, B, C, D . Выделим три свойства этих высот. 1) Если две высоты пересекаются, то две оставшиеся высоты тоже пересекаются. Действительно, если, скажем, пересекаются h_a и h_b , то прямые AB, h_a, h_b лежат в одной плоскости, эта плоскость перпендикулярна CD и, значит, $CD \perp AB$. Но тогда CD, h_c и h_d перпендикулярны AB , значит, они лежат в одной плоскости и, значит, h_c пересекается с h_d . 2) Если одна высота пересекает две другие, то она пересекает и третью. Действительно, при проекции на грань ABC высоты h_a, h_b и h_c переходят в высоты треугольника ABC , а высота h_d проектируется в точку. Если h_d пересекает h_a и h_b , то эта точка лежит и на третьей; значит, h_d пересекает и h_c . 3) Если три высоты попарно пересекаются, то они все проходят через одну точку. Действительно, в противном случае они все лежали бы в одной плоскости, что, очевидно, невозможно. Если, скажем, h_d пересекает h_a и h_b , то в силу свойства 2) h_d пересекает h_c , в силу свойства 1) h_a, h_b и h_c попарно пересекаются,

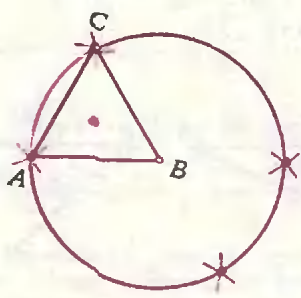


Рис. 9.

а в силу 3) все высоты проходят через одну точку.

14. Нельзя. Указание. Поставьте тетраэдр на горизонтальную плоскость и спроектируйте векторы на вертикальную прямую.

15. а) Так как $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$, то при $\alpha = 20^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ имеем $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{(1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = 3$. Полагая $u = \operatorname{tg}^2 \alpha$, получаем $u(3 - u)^2 = 3(1 - 3u)^2$. Отсюда $u^3 - 33u^2 + 27u - 3 = 0$. б) Положим $\operatorname{tg}^2 20^\circ = u_1, \operatorname{tg}^2 40^\circ = u_2, \operatorname{tg}^2 80^\circ = u_3$. Тогда в силу предыдущего $u^3 - 33u^2 + 27u - 3 = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) = u^3 - (u_1 + u_2 + u_3)u^2 + (u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3)u - u_1u_2u_3$. Поэтому $u_1 + u_2 + u_3 = 33$. Следовательно,

$$\frac{1}{\cos^2 20^\circ} + \frac{1}{\cos^2 40^\circ} + \frac{1}{\cos^2 60^\circ} + \frac{1}{\cos^2 80^\circ} = \operatorname{tg}^2 20^\circ + \operatorname{tg}^2 40^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{tg}^2 80^\circ + 4 = 33 + 3 + 4 = 40.$$

Годный калейдоскоп
(см. «Квант» № 1)

1. Сумма $1 + 2 + \dots + n$ равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Произведение же двух последовательных целых чисел может оканчиваться лишь на 2, 6 или 0. Поэтому половина этого произведения может оканчиваться лишь на 1, 6, 3, 8, 0 или 5, т. е. сумма $1 + 2 + \dots + n$ не может оканчиваться даже на 9.

2. Нет. Действительно, при каждой операции количество кусков увеличивается на 3; поэтому общее число кусков при делении на 3 дает в остатке 1. Число же 1989 делится на 3.

3. Продолжения сторон правильного n -угольника при нечетном n делят плоскость на $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ частей. При $n = 1989$ это число больше миллиона.

4. В 1971 году.

5. $1792 + 179 + 17 + 1 = 1989$.

6. Нельзя. В самом деле, пусть в ящике вертикальных рядов в три раза больше, чем горизонтальных. Тогда если x — количество горизонтальных рядов, то $3x^2 = 1989$, или $x^2 = 663$; но 663 не является квадратом целого числа. Противоречие.

7. $999 + 999 = 9$.

8. Если прямая, разрезающая многоугольник, проходит через две его вершины, общее количество вершин увеличивается на 2; если через одну вершину — на 3; если не проходит через вершины — на 4. Таким образом, одним разрезанием можно получить самое большее 4 новые вершины. Поскольку $1989 = 3 + 496 \cdot 4 + 2$, ясен оптимальный алгоритм: надо 496 раз произвести разрезы, не задевающие вершин, и еще один «диагональный» разрез — всего 497 разрезов.

9. На 9.

Международная физическая олимпиада
(см. «Квант» № 1)

Решения всех олимпиадных задач для публи-

кации подготовили члены нашей команды: А. Мазуренко — задача 1, А. Малкин — задача 2, К. Пеианен — задача 3, В. Мороз — задача 4 и Ю. Кравченко — задача 5. К сожалению, из-за недостатка места мы вынуждены дать решения только теоретических задач, причем в очень сокращенном виде.

Задача 1

1) Из формулы классического эффекта Доплера $\nu' = \nu(1 + v/c)$ находим диапазон длин волн для лазера:

$$\lambda(v) \in [\lambda(v_1); \lambda(v_2)] = [600 \text{ нм}; (600 + 0,012) \text{ нм}].$$

Поглощаемые фотоны в диапазоне длин волн лазера распределены равномерно.

Относительная ошибка в случае классического приближения равна 10^{-5} . Как видим, она мала.

2) Ширина спектра скоростей ионов после ускорения равна

$$\Delta v' = \frac{v_2^2 - v_1^2}{\sqrt{v_2^2 + 2Ue/m} + \sqrt{v_1^2 + 2Ue/m}}$$

При увеличении U ширина спектра уменьшается.

3) Наименьшее значение напряжения равно

$$U_{\min} = \left(\frac{v_2^2 \lambda_1 - c^2 (\Delta \lambda')^2}{2\sqrt{2e/mc \Delta \lambda' \lambda_2}} \right)^2 \approx 159,8 \text{ В,}$$

где $\Delta \lambda' = \lambda_2 - \lambda_1 = 10^{-3} \text{ нм}$.

Задача 2

1) $\omega = 2\sqrt{gR}$.

2) $E_{\text{к пост}} = 2gRMr^2/R^2 = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$;

$$E_{\text{к вращ}} = \Delta E_{\text{р}} = E_{\text{к пост}} R^2 / (2r^2).$$

3) $T = Mg(1 - 2r^2/R^2) / 2 = 1,95 \text{ Н}$.

4) Если начало координат находится в точке P (см. рис. 4 в статье), ось X направлена по горизонтали вправо, а ось Y — по вертикали вниз, то:

при опускании диска

$$x = 0, v_x = 0, y = H + r\varphi,$$

$$v_y = 2r\sqrt{g(H + r\varphi)} / R, \omega = 2\sqrt{g(H + r\varphi)} / R;$$

во время перехода нити с одной стороны диска на другую

$$x = 0, v_x = 0, y = H + r \sin \varphi,$$

$$v_y = (2r\sqrt{gH \cos \varphi}) / R, \omega = 2\sqrt{gH/R};$$

при подъеме диска

$$x = 0, v_x = 0, y = H - r(\varphi - \pi),$$

$$v_y = 2r\sqrt{g(H - r(\varphi - \pi))},$$

$$\omega = 2\sqrt{g(H - r(\varphi - \pi))} / R.$$

5) $H_{\max} = (2T_{\min} - Mg)R^2 / (4MgR) = 1,23 \text{ м}$.

Задача 3

1) Вследствие центральной симметрии,

$$r_0^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 3(\Delta x)^2,$$

$$P_0^2 = (\Delta P_x)^2 + (\Delta P_y)^2 + (\Delta P_z)^2 = 3(\Delta P_x)^2.$$

Если $\Delta P_x \Delta x \geq \hbar/2$, то $r_0^2 P_0^2 = 9(\Delta x)^2 (\Delta P_x)^2 \geq 9\hbar^2/4$.

2) Пусть M — масса иона A^{Z-} , v — скорость электрона перед рекомбинацией, V — скорость иона $A^{(Z-1)+}$, u — скорость иона $A^{(Z-2)+}$ после рекомбинации. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{(M+m)V^2}{2} + E_{\text{эл}(Z-1)} =$$

$$= \frac{(M+2m)u^2}{2} + E_{\text{вн}(Z-2)} + h\omega,$$

$$mv + (M+m)V = (M+2m)u + h\omega/c.$$

Значения внутренней энергии $E_{\text{вн}(Z-1)}$ и $E_{\text{вн}(Z-2)}$ определяются в следующих пунктах.

3) $E_{\text{вн}(Z-1)} = -\frac{k^2 Z^2 e^4 m}{2h^2}.$

4) $E_{\text{вн}(Z-2)} = -\frac{k^2 e^4 m (Z-1/4)^2}{h^2}.$

5) $Z=4$; искомый ион — $\text{Be}^{2+}.$

Информация

В первом номере журнала «Наука и жизнь» за 1989 год опубликованы условия приема и вступительное задание на биологическое отделение Всесоюзной заочной математической школы при МГУ. Если вы интересуетесь не только физикой и математикой, но и биологией, приглашаем вас принять участие в конкурсе.

Биологическая комиссия ВЗМШ



Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уровев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:

А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можяев, В. А. Орлов, И. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. Н. Вилемкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардашевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:

Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
Т. Н. Кольченко, Д. А. Крымов, С. Ф. Лукин,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчуркина, Л. А. Тишкова,
П. И. Чернуский, О. Н. Эстис, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещают читателей о том, что 8 декабря 1988 года скончался член редакционного совета академик Андрей Петрович Ершов.

Сдано в набор 23.11.88. Подписано к печати 04.01.89.
Т-04094. Формат 70×100/16. Бумага офсетная № 1. Печать
офсетная. Усл. кр.-отт. 27,10. Усл. печ. л. 6,46. Уч.-изд. л.
8,10. Тираж 187 366 экз. Заказ 2942. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Поправка

В «Кванте» № 11—12 за прошлый год на с. 2 приведена неверная дата смерти А. Н. Колмогорова. Андрей Николаевич скончался 20 октября 1987 года. Редакция приносит свои извинения читателям.

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

МОТИВЫ СИММЕТРИИ

Симметрия и асимметрия на шахматной доске — популярные геометрические мотивы, возникающие и в практической игре, и в композиции. Мы уже не раз касались этой темы («Квант», 1983, № 5; 1986, № 12; 1987, № 4), но она столь обширна и увлекательна, что к ней можно обращаться много раз.

Вот одна партия из коллекции шахматных диковин, сыгранная в чемпионате СССР (Москва, 1931 г.).

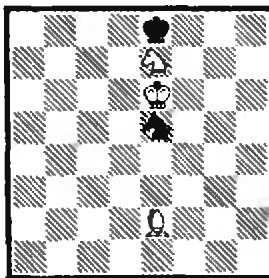
М. Ботвинник — Н. Рюмин
 1. d4 d5 2. c4 c6 3. Kf3 Kf6 4. e3 e6 5. Cd3 Kbd7 6. 0—0 Cd6 7. Kbd2 e5 8. e4 0—0 9. cd cd 10. ed ed.

Противники разыграли славянскую защиту и никакого желания повторять ходы у черных, а тем более у белых, не было. Но сделав десять ходов, партнеры, наверное, были немало удивлены, обнаружив на доске полную симметрию, не говоря уже о необычном загромождении фигурами линии «d». Все-таки в симметричной позиции предпочтение обычно имеет та сторона, чей ход. В данном случае Ботвинник умело пользуется этим преимуществом — свою пешку «d» он надежно защищает, а неприятельскую завоевывает.

11. Ke4! K:e4 12. C:e4 Kc5 (лучше 12...Kf6) 13. Cc2 Cg4 14. Ф:d4 C:f3 15. gf Le8 16. Ld1 Le2 17. Cf5 g6 18. Ch3 Kd7 19. Ce3 Ce5 20. Фc4 L:b2 21. Лас1 (комментируя партию, Ботвинник отметил, что здесь быстрее выигрывало 21. d6) 21...Kb6 22. Фe4 Фd6? (упорнее 22...Cd6, теперь все кончено) 23. f4 Cg7 24. Ce5 Фd8 25. Ce7 Фe8 26. d6 Фb5 27. d7 K:d7 28. C:d7, и через несколько ходов черные сдались.

Основная идея жанра шахматной композиции «симметрия—асимметрия» заключается в том, что внешне симметричная позиция имеет асимметричное решение. Конечно, абсолютной вертикальной симметрии на шахматной доске не бывает из-за наличия

«лишней» вертикали. Собственно благодаря этой вертикали и возникают парадоксальные ситуации. Все сегодняшние примеры — из области этюдов.



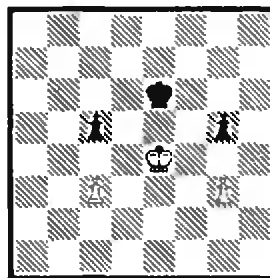
Г. Адамсон, 1924 г.
Выигрыш.

1. Kd5! Kd7! (1...Kf7, Kg6 2. Ch5, 1...Kc6 2. Cb5) 2. Kpd6! (но не 2. Cb5? Kpd8! 3. C:d7 пат) 2...Kpd8! (не спасает 2...Kb8 3. Cb5+ Kpd8 4. Kb6 Kc6! 5. Kp:c6!, 2...Kf8 3. Ch5+ Kpd8 4. Kf6! Kpc8 5. Kpe7) 3. Cd3! с разветвлениями: 3...Kpc8 4. Ke7+ Kpd8 5. Kc6+ Kpe8 6. Cg6+, 3...Kpe8 4. Kc7+ Kpd8 5. Ke6+ Kpc8 6. Ca6+, 3...Kb8 4. Kb6 Kpe8 5. Kpc7, 3...Kf8 4. Kf6 Kpc8 5. Kpe7! и конь пойман. Почему же не годится 1. Kf5? Дело в том, что тогда после 1...Kf7! 2. Kpf6 Kpf8 3. Cf3 Kpe8 4. Kg7+ Kpf8 5. Ke6+ Kpg8! для шаха слону у белых не хватает еще одной вертикали.

Рассмотрим такой этюд.

А. Селезнев, 1917 г. Белые: Kpe5, Ca8, пe6; черные: Kpg4, Kf4, пb4, h4. Ничья.

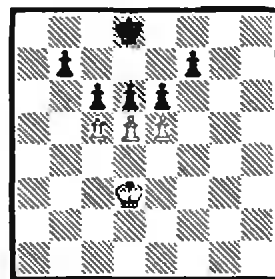
При чем здесь симметрия? — спросит читатель. Но три хода: 1. Ce4! K:e6! 2. Cf5+ Kpf3 3. C:e6 Kpe3!, и мы приходим к нашему сюжету. Кажется, что белым не спастись (одна из пешек проскакивает в ферзи) и все же: 4. Kpd6! Kpd4 5. Kpc6 Kpc3 6. Kpd5! b3 7. Kpe4 b2 8. Ca2 h3 9. Kpf3, и обе пешки задержаны. В случае 4. Kpf6? для белого слона не нашлось бы поля справа, соответствующего полю a2. Кажется, это первый в истории этюдный пример с «симметрией—асимметрией».



Я. Кнеппель, 1967 г.
Выигрыш.

На первый взгляд непонятно, какое значение может иметь крайняя вертикаль в пешечном этюде. Ведь пешка не в состоянии попасть на нее.

1. c4! Kpf6 (1...Kpd6 2. Kpf5 g4 3. Kp:g4 Kpe5 4. Kph5 Kpd4 5. g4 Kp:c4 6. g5 Kpd3 7. g6 c4 8. g7 c3 9. g8Ф c2 10. Фg5) 2. Kpd5 Kpf5 3. Kp:c5 Kpg4 4. Kpd4 Kp:g3 5. c5 g4 6. c6 Kpf2 7. c7 g3 8. c8Ф g2, и ферзь легко справляется с пешкой «g». В случае 1. g4? Kpd6! 2. Kpf5 (2. c4 Kpe6) 2...Kpd5 3. Kp:g5 Kpc4 4. Kpf4 Kp:c3 5. g5 c4 6. g6 Kpb2 7. g7 c3 8. g8Ф c2 слоновая пешка уже позволяет черным добиться ничьей (патовая идея)!



О. Рияхимаа, 1942 г.
Ничья.

В этом примере вертикаль «h» будет использована совсем иначе.

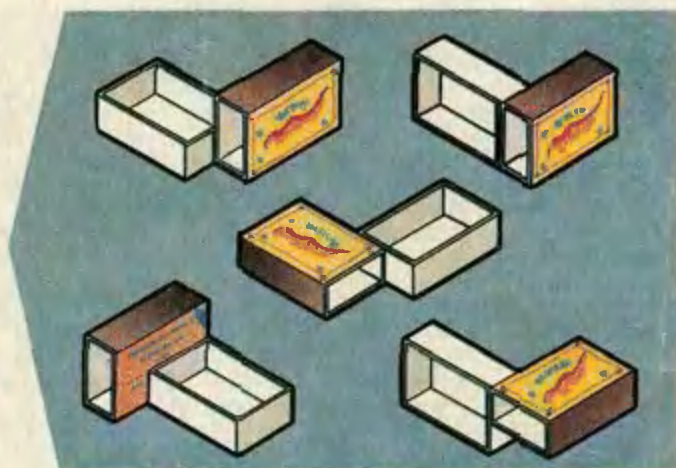
1. de! de (после 1...dc 2. ef Kpe7 3. e6 движение черных пешек в конце концов приведет только к пату) 2. ef Kpe7 3. Kpe4 Kp:f7 4. Kp:e5 Kpe7 5. Kpf5! Kpd7 6. Kpe5 Kpc7 7. Kpd4 Kpb8 8. Kpc4 Kra7 9. Kpb4 Kra6 10. Kra4 с ничьей. Не проходит однако 1. de? de! 2. cb Kp7 3. Kpc4 Kp:b7 4. Kp:c5 Kpc7 5. Kpb5 Kpd7 6. Kpc5 Kpe7 7. Kpd4 Kpf8 8. Kpe4 Kpg7 9. Kpf4 Kph6!, и черные берут верх благодаря маневру на дальней вертикали «h».

Е. Я. Гук

Цена 45 коп.

Индекс 70465

Любителям головоломок, может быть, знакомо имя Джерри Слокума — исследователя и собирателя головоломок из Калифорнии, которому Мартин Гарднер посвятил главу одной из своих популярных книг. В 1986 году Слокум вместе с датским изобретателем головоломок Джеком Ботермансом выпустил в свет книгу о своей, вероятно, крупнейшей в мире коллекции: «Головоломки старые и новые». В этой богато иллюстрированной книге представлены все



возможные механические головоломки, т. е. «объекты, состоящие из одной или нескольких частей, которые требуется перевести в заданное состояние путем манипуляций руками, используя логику, интуицию, удачу и ловкость». Познакомьтесь с одной головоломкой из этой книги, привлечшей нас тем, что ее легко сделать, но нелегко решить.

Для изготовления вам понадобится хороший клей и 5 одинаковых спичечных коробков с соотношением размеров 3:2:1 (такие коробки можно найти, хотя они и отличаются от наиболее распространенного у нас стандарта). Склейте из них 5 фигурок, как показано на рисунке. А теперь задача: закройте все коробки! Как пишут авторы книги, известны три различных решения. Здесь приводится внешний вид одного из них. А секрет сборки будет раскрыт в следующем номере журнала.